

**Галкин С.В.**

**Краткий курс математического анализа  
в лекционном изложении  
для студентов МГТУ им. Н. Э. Баумана  
(третий семестр)**

Москва 2005.

## Часть1 Кратные и криволинейные интегралы, теория поля.

### Лекция 1. Двойной интеграл.

#### Задача об объеме цилиндрического тела.

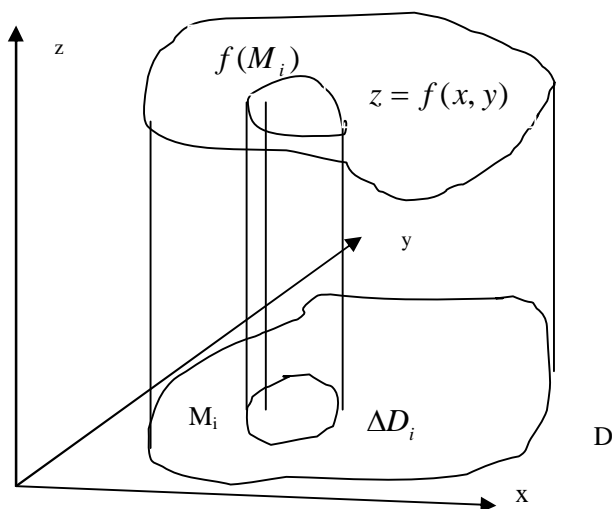
К определенному интегралу мы пришли от задачи о площади криволинейной трапеции. К двойному интегралу мы приходим, решая задачу об объеме цилиндрического тела.

- Рассмотрим, например, прямой круговой цилиндр с высотой  $h$  и радиусом основания  $R$  его объем равен  $V = \pi R^2 h$
- Объем цилиндра той же высоты, в основании которого лежит эллипс с полуосями  $a, b$  равен  $V = \pi abh$ .
- Объем цилиндра той же высоты, с площадью основания  $S$ , равен  $V = Sh$ .

Пусть надо вычислить объем цилиндрического тела, в основании которого лежит область  $D$  с площадью  $S$ , а высота  $h$  изменяется от точки к точке так, что конец ее описывает некоторую поверхность  $\sigma$  ( $h = f(M(x, y))$ ). Тогда логично разбить область  $D$  на области малого размера – организовать **разбиение** области на области – **элементы разбиения**. На каждом элементе **отметим** точку  $M(x, y)$  и построим над этим элементом прямой круговой цилиндр, высота которого постоянна для всех точек элемента и равна  $h = f(M(x, y))$ . Вычислим объем этого элементарного цилиндра. Просуммируем объемы всех элементарных цилиндров. Эта сумма и даст приближенно искомый объем цилиндрического тела тем точнее, чем меньше будут размеры элементов разбиения. Этот алгоритм используем для построения двойного интеграла

#### Двойной интеграл<sup>1</sup>

$$\iint_D f(x, y) dS.$$



1. Организуем разбиение области  $D$  на элементы – области  $\Delta D_i$  так, чтобы эти элементы не имели общих внутренних точек и  $D = \bigcup_{i=1}^n \Delta D_i$  (**условие А**)
2. Отметим на элементах разбиения «отмеченные точки»  $M_i$  и вычислим в них значения функции  $f(M_i) = f(x_i, y_i)$
3. Построим интегральную сумму  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$ , где  $\Delta S_i$  - площадь  $\Delta D_i$
4. Переходя к пределу при условии  $\max_i \text{diam}(\Delta D_i) \rightarrow 0$  (**условие В**), получим двойной интеграл как предел интегральных сумм:

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\max_i \text{diam}(\Delta D_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

<sup>1</sup> Здесь рассматривается упрощенный вариант построения интеграла, более общий вариант рассмотрен в седьмом выпуске учебника «Математика в техническом университете» под ред. проф. В.С. Зарубина и проф. А.П. Крищенко М. Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана 2001 (далее просто учебник).

## Теорема существования<sup>2</sup>.

Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой односвязной области  $D^3$ . Тогда двойной интеграл существует как предел интегральных сумм.

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\max_i \text{diam}(\Delta D_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i.$$

*Замечание<sup>4</sup>*. Предел этот не зависит от

- способа выбора разбиения, лишь бы выполнялось условие А
- выбора «отмеченных точек» на элементах разбиения,
- способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие В

## Свойства двойного интеграла<sup>5</sup>.

### 1. Линейность

а) свойство суперпозиции  $\iint_D (f_1(x, y) + f_2(x, y)) dS = \iint_D f_1(x, y) dS + \iint_D f_2(x, y) dS$

б) свойство однородности  $\iint_D \lambda f(x, y) dS = \lambda \iint_D f(x, y) dS$

Доказательство. Запишем интегральные суммы для интегралов в левых частях равенств. Они равны интегральным суммам для правых частей равенств, так как число слагаемых конечно. Затем перейдем к пределу, по теореме о предельном переходе в равенстве получим желаемый результат.

### 2. Аддитивность.

Если  $D = D_1 \cup D_2$ , то  $\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS$

Доказательство. Выберем разбиение области  $D$  так, чтобы ни один из элементов разбиения (первоначально и при измельчении разбиения) не содержал одновременно как элементы  $D_1$ , так и элементы  $D_2$ . Это можно сделать по теореме существования (замечание к теореме). Далее проводится доказательство через интегральные суммы, как в п. 1.

3.  $\iint_D dS = S_D$  - площадь области  $D$ .

4. Если в области  $D$  выполнено неравенство  $f(x, y) \geq g(x, y)$ , то  $\iint_D f(x, y) dS \geq \iint_D g(x, y) dS$  (**неравенство можно интегрировать**).

Доказательство. Запишем неравенство для интегральных сумм и перейдем к пределу. Заметим, что, в частности, возможно  $g(x, y) \equiv 0$

### 5. Теорема об оценке.

Если существуют константы  $m, M$ , что  $\forall (x, y) \in D \quad m \leq f(x, y) \leq M$ , то

$$mS_D \leq \iint_D f(x, y) dS \leq MS_D$$

<sup>2</sup> Здесь рассматривается непрерывная функция, более общий вариант см. в седьмом томе учебника

<sup>3</sup> Далее граница области предполагается кусочно-гладкой

<sup>4</sup> Это замечание относится ко всем рассматриваемым далее интегралам

<sup>5</sup> При обсуждении свойств предполагается выполнение условий теоремы существования

Доказательство. Интегрируя неравенство  $m \leq f(x,y) \leq M$  (свойство 4), получим  $\iint_D m dS \leq \iint_D f(x,y) dS \leq \iint_D M dS$ . По свойству 1 константы  $m, M$  можно вынести из-под интегралов. Используя свойство 3, получим искомый результат.

**6. Теорема о среднем** (значении интеграла).

Существует точка  $c(x_c, y_c) \in D$ , что  $f(c) = \frac{1}{S_D} \iint_D f(x,y) dS$ .

Доказательство. Так как функция  $f(x,y)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $D$ , то существует ее нижняя грань  $\mu = \inf_D f(x,y)$  и верхняя грань  $M = \sup_D f(x,y)$ . Выполнено неравенство  $\forall (x,y) \in D \quad \mu S_D \leq \iint_D f(x,y) dS \leq M S_D$ . Деля

обе части на  $S_D$ , получим  $\mu \leq \frac{1}{S_D} \iint_D f(x,y) dS \leq M$ . Но число  $\frac{1}{S_D} \iint_D f(x,y) dS$

заключено между нижней и верхней гранью функции. Так как функция  $f(x,y)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $D$ , то в некоторой точке  $c \in D$  функция должна принимать это значение. Следовательно,

$$f(c) = \frac{1}{S_D} \iint_D f(x,y) dS.$$

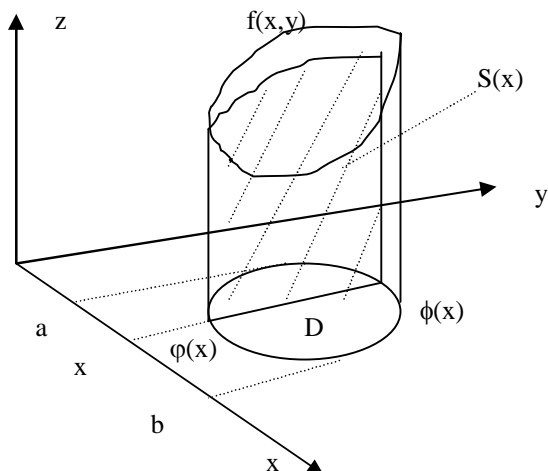
Геометрический смысл теоремы состоит в том, что существует цилиндр постоянной высоты  $f(c)$ , объем которого равен объему цилиндрического тела  $\iint_D f(x,y) dS$

### Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.

Предположим, что  $D$  – плоская область, лежащая в некоторой плоскости и введем в этой плоскости декартову систему координат.

Область  $D$  назовем *правильной*, если любая прямая, параллельная декартовым осям, пересекает ее не более чем в двух точках.

Можно показать, что замкнутую ограниченную область с кусочно-гладкой границей можно представить в виде объединения правильных областей, не имеющих общих внутренних точек. Поэтому интеграл по области  $D$  можно вычислять как сумму интегралов (свойство 2) по правильным областям. Будем считать, что нам надо вычислить двойной интеграл по правильной области.



Вспомним формулу для вычисления объема тела по площадям параллельных сечений

$$V = \int_a^b S(x) dx, \text{ где } a, b - \text{«крайние» точки области}$$

$D$  по  $x$ ,  $S(x)$  - площадь сечения тела одной из параллельных плоскостей (при фиксированном  $x$ ). Эта плоскость пересекается с плоскостью  $OXY$  по прямой, параллельной оси  $OY$ , соединяющей точку входа в область  $\varphi(x)$  с точкой выхода  $\phi(x)$ . Графики функций  $\varphi(x)$ ,  $\phi(x)$

образуют границу области  $D$ .  $S(x) = \int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x,y) dy$  -

площадь криволинейной трапеции..

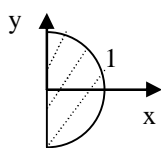
Подставляя  $S(x)$  в формулу для объема, получим  $V = \int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$ . Это повторный интеграл, вернее один из них. Второй повторный интеграл можно получить, вводя сечения, параллельные оси ОХ. По аналогии  $V = \int_c^d \left( \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x, y) dx \right) dy$ . По смыслу двойного интеграла (объем цилиндрического тела)

$$\int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dS = \int_c^d \left( \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x, y) dx \right) dy = V$$

Примеры. Записать двойной интеграл по заданной области и повторные интегралы.

1.

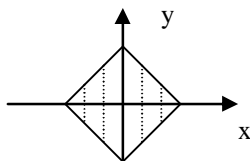
$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy =$$

$$\int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

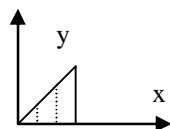
$$2. \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 1 - x \\ y = x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 \left( \int_{-x-1}^{x+1} f(x, y) dy \right) dx + \int_0^1 \left( \int_{x-1}^{-x+1} f(x, y) dy \right) dx =$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_{-y-1}^{y+1} f(x, y) dx \right) dy + \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{-y+1} f(x, y) dx \right) dy$$

$$3. \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ y = x \end{cases}$$



$$\iint_D e^{(y-1)^2} dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x e^{(y-1)^2} dy \right) dx \quad (\text{внутренний интеграл не берется}) =$$

$$\int_0^1 \left( \int_y^1 e^{(y-1)^2} dx \right) dy = \int_0^1 (1-y) e^{(y-1)^2} dy = -\frac{1}{2} e^{(y-1)^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e-1)$$

### Геометрический и физический «смысл» двойного интеграла.

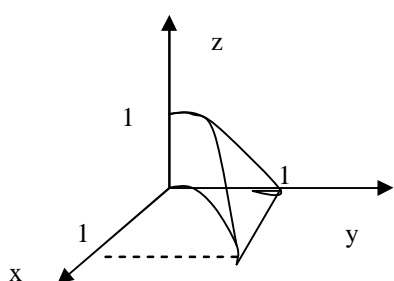
К двойному интегралу  $\iint_D f(x, y) dS$  мы пришли от задачи об объеме цилиндрического тела, расположенного над областью  $D$  с переменной высотой  $f(x, y)$ .

В этом и состоит его *геометрический смысл*.

Можно рассмотреть задачу о массе плоской пластины, представляющей собой плоскую область  $D$ , плотность которой равна  $f(x, y)$ , т.е. меняется от точки к точке. Достаточно ассоциировать переменную плотность с переменной высотой в задаче об объеме, чтобы понять, что мы имеем ту же модель.

Поэтому *физический смысл двойного интеграла заключается в том, что*  $\iint_D f(x, y) dS$  равен массе плоской области  $D$ , плотность которой равна  $f(x, y)$ .

Пример. Вычислить объем  $V$  цилиндрического тела, ограниченного двумя параболическими цилиндрами  $z = 1 - y^2$  и  $x = y^2$  и площадь его основания  $D$ , расположенного в плоскости  $OXY$ .



$$V_D = 2 \int_0^1 \left( \int_0^{y^2} (1 - y^2) dx \right) dy = 2 \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

$$S_D = 2 \int_0^1 \left( \int_0^{y^2} dx \right) dy = 2 \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3}$$

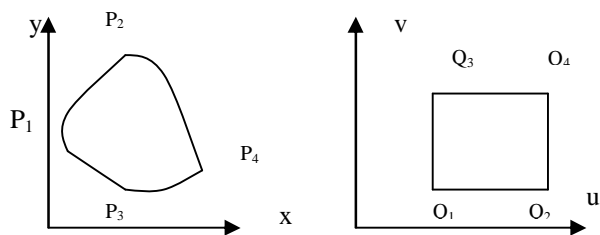
## Лекция 2. Приложения двойного интеграла.

**Теорема.** Пусть установлено взаимно однозначное соответствие областей  $D_{xy}$  и  $D_{uv}$  с помощью непрерывных, имеющих непрерывные частные производные функций  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ . Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в области  $D_{xy}$ . Тогда

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I| du dv, \text{ где } I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} - \text{якобиан (определитель}$$

Якоби).

Доказательство (нестрогое). Рассмотрим элементарную ячейку в координатах  $u, v$ :  $Q_1, Q_3, Q_4, Q_2$  – прямоугольник со сторонами  $du, dv$ . Рассмотрим ее образ при отображении  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  – ячейку  $P_1, P_3, P_4, P_2$ .



Запишем координаты точек  $Q_1(u, v)$ ,  $Q_2(u+du, v)$ ,  $Q_3(u, v+dv)$ ,  $P_1(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ ,  $P_2(\varphi(u+du, v), \psi(u+du, v)) \approx P_2((\varphi(u, v) + \varphi'_u du), (\psi(u, v) + \psi'_u du))$ ,  $P_3(\varphi(u, v+dv), \psi(u, v+dv)) \approx P_3((\varphi(u, v) + \varphi'_v dv), (\psi(u, v) + \psi'_v dv))$

Приближенно будем считать ячейку  $P_3, P_4, P_1, P_2$  параллелограммом, образованным сторонами  $\overrightarrow{P_1P_2} = \{\varphi'_u du, \psi'_u du\}$ ,  $\overrightarrow{P_1P_3} = \{\varphi'_v dv, \psi'_v dv\}$ . Вычислим площадь этой ячейки как площадь параллелограмма.

$$S = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi'_u du & \psi'_u du & 0 \\ \varphi'_v dv & \psi'_v dv & 0 \end{vmatrix} = \left\| \begin{vmatrix} \varphi'_u du & \psi'_u du \\ \varphi'_v dv & \psi'_v dv \end{vmatrix} \vec{k} \right\| = \left| \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \right| du dv = |I| du dv.$$

Подставляя в интеграл площадь параллелограмма в качестве площади ячейки  $dx dy$ , получим  $\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_u} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I| du dv$ .

**Следствие.** Рассмотрим частный случай – полярную систему координат  $u = \rho, v = \varphi$ :

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi. I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

*Пример.* Вычислить площадь внутри кардиоиды  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ .

$$S = 2 \int_0^{\pi} \left( \int_0^{a(1+\cos \varphi)} \rho d\rho \right) d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

*Пример.* Вычислить объем внутри прямого кругового цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$ , ограниченный плоскостью  $z = x + y$  в первом октанте.

$$V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho z d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi = \frac{2}{3}.$$

Для каждой задачи можно выбрать ту систему координат, в которой вычисления проще. Декартова система координат удобна для прямоугольных областей. Если стороны прямоугольника параллельны координатным осям, то пределы интегрирования в повторном интеграле постоянны. Полярная система координат удобна для круга, кругового сектора или сегмента. Если центр круга находится в начале координат, то пределы интегрирования по углу и радиусу постоянны.

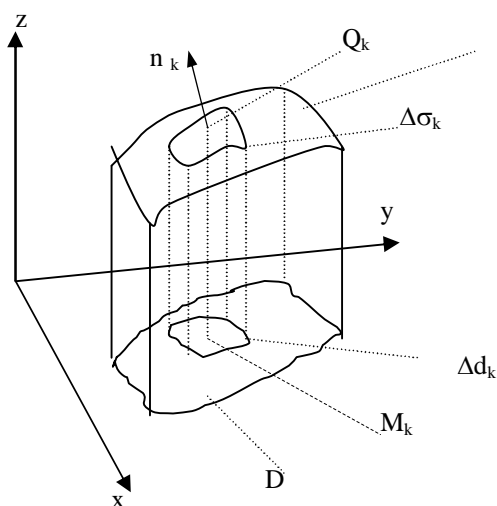
### Приложения двойного интеграла.

С помощью двойного интеграла можно вычислить объем цилиндрического тела, площадь и массу плоской области. От этих задач мы и пришли к двойному интегралу.

Но возможны и менее очевидные приложения.

*С помощью двойного интеграла можно вычислять площадь поверхности, определять статические моменты, моменты инерции и центр тяжести плоской области.*

### Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла.



Пусть поверхность  $\sigma$ , площадь которой надо вычислить, задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$  или уравнением  $z = f(x, y)$ .

Введем разбиение  $\sigma$  на ячейки  $\Delta \sigma_k$ , не имеющие общих внутренних точек, площадью  $\Delta v_k$ . Пусть область  $\sigma$  и ячейки  $\Delta \sigma_k$  проектируются на плоскость  $OXY$  в область  $D$  и ячейки  $\Delta d_k$  площадью  $\Delta s_k$ . Отметим на ячейке  $\Delta d_k$  точку  $M_k$ . В точке  $Q_k$  (ячейки  $\Delta \sigma_k$ ), которая проектируется в точку  $M_k$ , проведем единичный вектор нормали  $\{ \cos \alpha_k, \cos \beta_k, \cos \gamma_k \}$  к поверхности  $\sigma$  и касательную плоскость. Если приближенно считать равными площадь  $\Delta v_k$  ячейки  $\Delta \sigma_k$  и площадь ее проекции на касательную плоскость,

то можно считать справедливым соотношение  $\Delta v_k \cos \gamma_k = \Delta s_k$ . Выразим отсюда  $\Delta v_k = \Delta s_k / \cos \gamma_k$ . Будем измельчать разбиение при условии  $\max \text{diam } \Delta \sigma_k \rightarrow 0$ , что для кусочно-гладкой поверхности, не ортогональной плоскости OXY, равносильно  $\max \text{diam } \Delta d_k \rightarrow 0$ . Вычислим площадь поверхности как двойной интеграл

$$S_D = \lim_{\max \text{diam } \Delta \sigma_k \rightarrow 0} \sum_k \Delta v_k = \lim_{\max \text{diam } \Delta d_k \rightarrow 0} \sum_k \frac{1}{|\cos \gamma(x_k, y_k, z_k)|} \Delta s_k = \iint_D \frac{1}{|\cos \gamma(x, y, z)|} ds.$$

Сюда остается лишь подставить  $\cos \gamma(x, y, z)$ .

Если поверхность  $\sigma$  задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , то

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}F}}{|\overrightarrow{\text{grad}F}|} = \frac{1}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} \{F_x', F_y', F_z'\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

$$\text{Поэтому в этом случае } \cos \gamma = \frac{F_z'}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}, \quad \frac{1}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + \frac{F_x'^2}{F_z'^2} + \frac{F_y'^2}{F_z'^2}}.$$

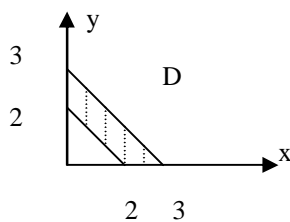
$$S_D = \iint_D \sqrt{1 + \frac{F_x'^2}{F_z'^2} + \frac{F_y'^2}{F_z'^2}} dx dy.$$

Если поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , то уравнение это можно свести к уравнению  $F(x, y, z) = 0$  и применить выведенную формулу:

$$-f(x, y) + z = F(x, y, z) = 0, \quad F_z' = 1, F_x' = -f_x', F_y' = -f_y', \quad \frac{1}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}$$

$$S_D = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy.$$

*Пример.* Вычислить площадь поверхности конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ , ограниченной плоскостями  $x + y = 2$ ,  $x + y = 3$ .



$$F = z^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad F_x' = -2x, F_y' = -2y, F_z' = 2z$$

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + \frac{(x^2 + y^2)}{z^2}} = \sqrt{2}.$$

$$S = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} S_D = \sqrt{2} \frac{1}{2} (9 - 4) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

### Вычисление статических моментов, координат центра тяжести, моментов инерции.

Пусть задана плотность вещества плоской материальной области  $D$   $\rho(x, y)$ . Выделим элементарную ячейку с массой  $dm$  и применим к ней известные формулы для материальной точки:

$$\text{Статические моменты относительно осей OX, OY} \quad \begin{aligned} dm_x &= y dm = y \rho(x, y) ds, \\ dm_y &= x dm = x \rho(x, y) ds. \end{aligned}$$

$$\text{Моменты инерции относительно осей OX, OY} \quad \begin{aligned} dJ_x &= y^2 dm = y^2 \rho(x, y) ds, \\ dJ_y &= x^2 dm = x^2 \rho(x, y) ds. \end{aligned}$$

$$\text{Момент инерции относительно начала координат } dJ_0 = dJ_x + dJ_y.$$



Двойным интегралом по всей области  $D$  вычисляем те же характеристики для области  $D$ .

$$m_x = \iint_D y\rho(x, y)ds, \quad m_y = \iint_D x\rho(x, y)ds, \quad J_x = \iint_D y^2\rho(x, y)ds, \quad J_y = \iint_D x^2\rho(x, y)ds, \quad J_0 = J_x + J_y.$$

Координаты центра тяжести  $\bar{x} = \frac{m_y}{m}$ ,  $\bar{y} = \frac{m_x}{m}$ , где  $m = \iint_D \rho(x, y)ds$  - масса области  $D$ .

*Пример.* Вычислить координаты центра тяжести полукруга  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $y \geq 0$  с заданной плотностью  $\rho(x, y) = y$ .

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy = \iint_D ydxdy = \int_0^\pi \left( \int_0^R r \sin \varphi r dr \right) d\varphi = \frac{2}{3} R^3$$

$$m_x = \iint_D y\rho(x, y)dxdy = \iint_D y^2dxdy = \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin^2 \varphi r dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{8} R^4$$

$$m_y = \iint_D x\rho(x, y)dxdy = \iint_D xydxdy = \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin \varphi \cos \varphi r dr \right) d\varphi = 0 \quad (\text{это было ясно заранее, по симметрии полукруга относительно ОУи независимости плотности от координаты } x).$$

Поэтому  $\bar{x} = \frac{m_y}{m} = 0$ ,  $\bar{y} = \frac{m_x}{m} = \frac{3\pi R}{16}$ .

*Пример.* Вычислить момент инерции полукруга  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $y \geq 0$  с заданной плотностью  $\rho(x, y)$  относительно прямой  $y = R$ .

$$J_{y=R} = \iint_D (y - R)^2 \rho(x, y)dxdy = \iint_D y^2 \rho(x, y)dxdy - 2R \iint_D y\rho(x, y)dxdy + R^2 \iint_D \rho(x, y)dxdy = \\ \iint_D y^2 \rho(x, y)dxdy - 2R \iint_D y\rho(x, y)dxdy + R^2 \iint_D \rho(x, y)dxdy = J_x - 2Rm_x + R^2 m.$$

Эта формула известна в теоретической механике.

### Замечание о несобственных двойных интегралах.

Точно так же, как и в определенных интегралах, вводят несобственные двойные интегралы двух типов: *интеграл от непрерывной функции по неограниченной области* (первого рода) и *интеграл от разрывной функции по ограниченной области* (второго рода).

Интеграл первого рода определяют как предел последовательности двойных интегралов от непрерывной функции по «расширяющимся» областям, стремящимся к заданной неограниченной области. Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся, если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся.

Интеграл второго рода<sup>6</sup> определяют как предел последовательности интегралов от непрерывной функции по «расширяющимся» областям, стремящимся к заданной области и исключаяющим точку разрыва. Если предел существует и конечен, то интеграл называется сходящимся, если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся.

*Пример.* Показать, что несобственный интеграл первого рода  $\iint_D \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^n}$  по

области  $D: \sqrt{x^2 + y^2} \geq R$  сходится при  $n < 2$  и расходится при  $n \geq 2$ .

<sup>6</sup> предполагается, что в области есть только одна точка разрыва функции

Показать, что несобственный интеграл первого рода  $\iint_B \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^n}$  по области

$B: \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$  сходится при  $n > 2$  и расходится при  $n \leq 2$ . Вычислим этот интеграл по области  $D_1: R_1 \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2$ .

$$\iint_{D_1} \frac{rd\varphi dr}{r^n} = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_1}^{R_2} r^{1-n} dr \right) d\varphi = 2\pi \frac{1}{2-n} (R_2^{2-n} - R_1^{2-n}).$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^n} = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2-n} (R_2^{2-n} - R_1^{2-n}) = \begin{cases} \frac{2\pi R_1^{2-n}}{n-2} & n > 2 \\ \infty & n \leq 2 \end{cases} \quad (R_1 = R),$$

$$\iint_B \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^n} = \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{2\pi}{2-n} (R_2^{2-n} - R_1^{2-n}) = \begin{cases} \frac{2\pi R_2^{2-n}}{2-n} & n < 2 \\ \infty & n \geq 2 \end{cases} \quad (R_2 = R).$$

Часто расширение математических знаний позволяет решать задачи, которые не получались старыми методами.

*Пример.* Вычислить интеграл Пуассона  $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

Неопределенный интеграл  $\int e^{-x^2} dx$  «не берется». Но двойной интеграл по области  $D: (x \geq 0, y \geq 0)$  равен

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = J^2.$$

С другой стороны, переходя к полярным координатам, получим

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = -\frac{\pi}{4} (\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r^2} - 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому  $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . По четности  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

### Лекция 3 Тройной интеграл.

#### Задача о массе пространственного тела.

Пусть есть некоторое пространственное материальное тело, занимающее область  $V$ , в каждой точке которой задана объемная плотность  $f(x, y, z)$ . Надо вычислить массу пространственного тела.

Эта задача приводит к понятию тройного интеграла.

Введем разбиение области  $V$  на элементарные области, не имеющие общих внутренних точек (**условие А**)  $\Delta v_k$  с малым объемом  $\Delta v_k$  (обозначение области и ее объема обычно одно и то же, это принято уже более 200 лет и не вносит путаницы).

На каждом элементе разбиения – элементарной области отметим точку  $M_k(x_k, y_k, z_k)$ . Вычислим плотность в этой точке  $f(x_k, y_k, z_k) = f(M_k)$  и предположим, что плотность

постоянна в элементарной области. Тогда масса элементарной области  $\Delta v_k$  приближенно равна  $\Delta v_k = f(M_k) \Delta v_k$ . Суммируя все такие массы элементарных областей (составляя интегральную сумму), приближенно получим массу области  $V \sum_k f(M_k) \Delta v_k \approx M_V$

Для того, чтобы точно вычислить массу области, остается перейти к пределу при условии  $\max_k \text{diam} \Delta v_k \rightarrow 0$  (**условие В**).

$$M_V = \lim_{\max_k \text{diam} \Delta v_k \rightarrow 0} \sum_k f(M_k) \Delta v_k = \iiint_V f(x, y, z) dv.$$

Так задача о массе пространственной области приводит к тройному интегралу<sup>7</sup>.

Введем некоторые ограничения на область интегрирования и подинтегральную функцию, достаточные для существования интеграла<sup>8</sup>.

*Потребуем, чтобы функция  $f(M)$  была непрерывна в области  $V$  и на ее границе.*

*Потребуем, чтобы область  $V$  была замкнутой, ограниченной, пространственно-односвязной областью с кусочно-гладкой границей.*

Область назовем пространственно-односвязной, если ее можно непрерывной деформацией стянуть в точку.

**Теорема существования.** Пусть область  $V$  и функция  $f(M)=f(x, y, z)$  удовлетворяют сформулированным требованиям. Тогда тройной интеграл существует как предел интегральных сумм.

$$\lim_{\max_k \text{diam} \Delta v_k \rightarrow 0} \sum_k f(M_k) \Delta v_k = \iiint_V f(x, y, z) dv.$$

*Замечание.* Предел этот не зависит<sup>9</sup>:

- 1) от выбора разбиения области, лишь бы выполнялось условие А
- 2) от выбора отмеченных точек на элементах разбиения
- 3) от способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие В.

### Свойства тройного интеграла.

#### 1. Линейность

$$\text{а) } \iiint_V (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dv = \iiint_V f(x, y, z) dv + \iiint_V g(x, y, z) dv$$

$$\text{б) } \iiint_V \lambda f(x, y, z) dv = \lambda \iiint_V f(x, y, z) dv$$

Эти свойства, как и для двойного интеграла, доказываются «через интегральные суммы». Составляют интегральную сумму для интегралов, стоящих в левой части равенства, в ней делают нужную операцию (это возможно, т.к. число слагаемых конечно) и получают интегральные суммы для интегралов в правой части. Затем, по теореме о предельном переходе в равенстве, переходят к пределу, и свойство доказано.

#### 2. Аддитивность (по множеству)

$$\iiint_{V \cup W} f(x, y, z) dv = \iiint_V f(x, y, z) dv + \iiint_W f(x, y, z) dv$$

Доказательство проводится, как и ранее, через интегральные суммы с использованием замечания к теореме существования.

<sup>7</sup> Здесь интеграл вводится несколько упрощенно. Более строгое определение интеграла приведено в выпуске VII учебника.

<sup>8</sup> Эти требования можно ослабить, распространив интеграл на функции со счетным числом разрывов первого рода (выпуск VII учебника).

<sup>9</sup> Это очевидно, иначе предел не существует, но это стоит подчеркнуть.

Разбиение выбирается и измельчается так, чтобы граница областей  $V$ ,  $W$  состояла из границ элементов разбиения (это можно сделать, учитывая замечание). Тогда интегральная сумма для интеграла в левой части равенства равна сумме двух интегральных сумм, каждая для своего для интеграла в правой части равенства. Переходя к пределу в равенстве, получаем требуемое соотношение.

$$3. \iiint_V C dv = CV, \text{ где } V - \text{объем области } V.$$

Интегральная сумма для интеграла в левой части  $\sum_k C \Delta v_k = C \sum_k \Delta v_k = CV$

$$4. \text{ Если } f(x, y, z) \geq g(x, y, z), \text{ то } \iiint_V f(x, y, z) dv \geq \iiint_V g(x, y, z) dv.$$

Переходя к пределу в неравенстве  $\sum_k f(M_k) \Delta v_k \geq \sum_k g(M_k) \Delta v_k$  (по теореме о переходе к пределу в неравенстве), получим требуемое соотношение.

*Следствие.* Если  $f(x, y, z) \geq 0$ , то  $\iiint_V f(x, y, z) dv \geq 0$ .

$$5. \text{ Теорема об оценке интеграла. Если } m \leq f(x, y, z) \leq M, \text{ то } mV \leq \iiint_V f(x, y, z) dv \leq MV.$$

Интегрируя неравенство  $m \leq f(x, y, z) \leq M$ , по свойству 4 получим требуемое неравенство.

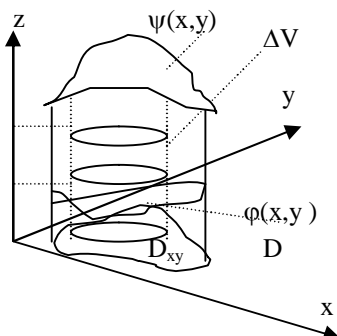
$$6. \text{ Теорема о среднем. Пусть выполнены требования теоремы существования. Тогда существует точка } C \text{ в области } V, \text{ такая, что } f(C) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) dv.$$

Доказательство. Так как функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $V$ , то существует ее нижняя грань  $\mu = \inf_V f(x, y, z)$  и верхняя грань  $M = \sup_V f(x, y, z)$ . Выполнено неравенство  $\forall (x, y, z) \in V \quad \mu V \leq \iiint_V f(x, y, z) dV \leq MV$ .

Деля обе части на  $V$  получим  $\mu \leq \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) dV \leq M$ . Но число  $\frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) dV$

заключено между нижней и верхней гранью функции. Так как функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $V$ , то в некоторой точке  $C \in V$  функция должна принимать это значение. Следовательно,  $f(C) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) dv$ .

### Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.



Пусть пространственное тело проектируется на плоскость  $OXY$  в область  $D$ , а на ось  $OZ$  в отрезок  $[c, d]$ . Пусть «верхняя» граница тела описывается уравнением поверхности  $z = \psi(x, y)$ , «нижняя» – уравнением  $z = \varphi(x, y)$ .

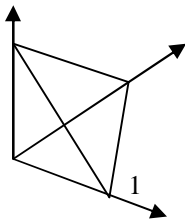
Пусть элемент  $\Delta V$  пространственного тела  $V$  проектируется на плоскость  $OXY$  в область  $D_{xy}$ , а на ось  $OZ$  в отрезок  $[z, z + \Delta z]$ . Для того чтобы вычислять тройной интеграл как предел интегральных сумм, нужно в интегральной сумме перебирать эти элементы по определенному алгоритму.

Если сначала перебирать элементы в столбце над областью  $D_{xy}$ , от нижней границы до верхней (внутренний интеграл), а затем перемещать область  $D_{xy}$  в  $D$  (внешний двойной интеграл), то получим повторный интеграл 
$$\iint_D \left( \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy.$$

Если сначала перебирать элементы в слое  $[z, z+\Delta z]$  (внутренний интеграл), а затем перемещать слой на  $[c, d]$ , (внешний интеграл), то получим повторный интеграл 
$$\int_c^d \left( \iint_{D(z)} f(x,y,z) dx dy \right) dz.$$
 И в том, и в другом случае тройной интеграл сводится к

определенному и двойному интегралам.

*Пример.* Вычислить массу тетраэдра плотностью  $f(x, y, z) = z$ , ограниченного плоскостями  $x+y+z = 1$ ,  $x+z=1$ ,  $x+y = 1$ ,  $y+z=1$ .



$$\int_0^1 dz \left( \iint_{D(z)} z dx dy \right) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} \left( \int_0^{1-x-z} z dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} z(1-x-z) dx \right) dz = \frac{1}{24}$$

$$\iint_D \left( \int_0^{1-x-y} z dz \right) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} z dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{24}$$

#### Лекция 4. Приложения тройного интеграла.

##### Замена переменных в тройном интеграле.

*Теорема.* Пусть с помощью непрерывных функций  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  имеющих непрерывные частные производные установлено взаимно однозначное соответствие пространственно односвязных ограниченных, замкнутых областей  $D_{xyz}$ ,  $D_{u,v,w}$  с кусочно-гладкой границей.

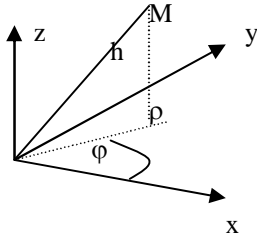
Тогда

$$\iiint_{V_{x,y,z}} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V_{u,v,w}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) |I| du dv dw, \quad \text{где} \quad I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} -$$

**якобиан** (определитель Якоби).

Теорема приведена без доказательства.

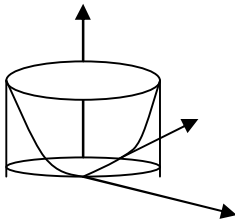
### Цилиндрическая система координат.



Вводятся цилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $h$ .  
 $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = h$ . Вычислим якобиан

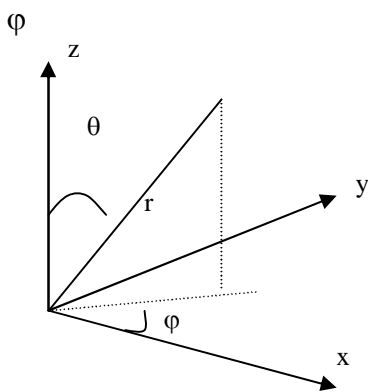
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho$$

*Пример* Вычислить объем пространственного тела, заключенного между цилиндрической поверхностью  $x^2 + y^2 = R^2$  и эллиптическим параболоидом  $z = x^2 + y^2$ . ( $z \geq 0$ ).



$$V = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \left( \int_0^{\rho^2} \rho dh \right) d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho d\rho^3 = \frac{\pi R^4}{2}$$

### Сферическая система координат.



Сферические координаты  $\varphi$ ,  $r$ ,  $\theta$ .

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta.$$

Вычислим якобиан  $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ 0 & \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = -\cos \theta (\sin \theta \cos \theta (-r^2)) - r \sin \theta (-r \sin^2 \theta) = r^2 \sin \theta.$$

*Пример.* Найти массу части шара (с центром в начале координат, радиусом  $R$ ), находящейся в первом октанте, если плотность вещества шара  $\gamma$  в каждой точке шара пропорциональна расстоянию этой точки от оси  $OZ$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \quad \gamma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr \sin \theta$$

$$M = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} r^2 \sin \theta kr \sin \theta d\theta = k \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi k R^4}{16} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi^2 k R^4}{32}.$$

### Приложения тройного интеграла.

*Геометрическое приложение* – **вычисление объема** любого пространственного тела.

По свойству 3 тройного интеграла  $\iiint_V dv = V$ , где  $V$  – объем области  $V$ .

С помощью двойного интеграла тоже можно вычислять объем, но только цилиндрического тела, а не произвольного.

*Пример.* Вычислить объем пространственного тела, ограниченного эллиптическим параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и шаром (единичного радиуса с центром в точке  $(0, 0, 1)$ )

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{1+\sqrt{1-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^1 \rho (1 + \sqrt{1-\rho^2} - \rho^2) d\rho = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} (1-\rho^2)^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{6}\pi.$$

*Механические приложения* – **вычисление массы пространственного тела, статических моментов, центра тяжести, моментов инерции** по формулам, которые выводятся аналогично соответствующим формулам для плоского тела с двойным интегралом ( $\gamma(x, y, z)$  – плотность вещества тела в каждой точке).

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad S_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad S_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$S_{xz} = \iiint_V y\gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{x} = \frac{1}{M} S_{yz}, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} S_{xz}, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} S_{xy}.$$

Формулы для моментов инерции запишите сами (например,  $J_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$ )

*Пример.* Определить координаты центра тяжести полушара  $z \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $\gamma = z$ . По симметрии  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ,  $M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \theta dr \int_0^{\pi/2} r \cos \theta d\theta = \frac{\pi R^4}{4}$ .

$$S_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \theta dr \int_0^{\pi/2} r \cos^2 \theta d\theta = \frac{2\pi R^5}{15}, \quad \bar{z} = \frac{8}{15} R.$$

### Лекция 5 Криволинейные интегралы 1 и 2 рода, их свойства..

#### Задача о массе кривой. Криволинейный интеграл 1 рода.

*Задача о массе кривой.* Пусть в каждой точке кусочно-гладкой материальной кривой  $L$ :  $(AB)$  задана ее плотность  $f(x, y, z)$ . Определить массу кривой.

Поступим так же, как мы поступали при определении массы плоской области (двойной интеграл) и пространственного тела (тройной интеграл).

1. Организуем разбиение области- дуги  $L$  на элементы – элементарные дуги  $\Delta l_i$  так, чтобы эти элементы не имели общих внутренних точек и  $L = \bigcup_{i=1}^n \Delta l_i$  (**условие А**)

2. Отметим на элементах разбиения «отмеченные точки»  $M_i$  и вычислим в них значения функции  $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$

3. Построим интегральную сумму  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i$ , где  $\Delta l_i$  - длина дуги  $\Delta l_i$  (обычно вводятся одни и те же обозначения для дуги и ее длины). Это – приближительное значение массы кривой. Упрощение состоит в том, что мы предположили плотность дуги постоянной на каждом элементе и взяли конечное число элементов.

Переходя к пределу при условии  $\max_i \text{diam}(\Delta l_i) \rightarrow 0$  (**условие В**), получим криволинейный интеграл первого рода как предел интегральных сумм:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \lim_{\max_i \text{diam}(\Delta l_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i.$$

### Теорема существования<sup>10</sup>.

Пусть функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на кусочно-гладкой дуге  $L$ <sup>11</sup>. Тогда криволинейный интеграл первого рода существует как предел интегральных сумм.

*Замечание.* Предел этот не зависит от

- способа выбора разбиения, лишь бы выполнялось условие А
- выбора «отмеченных точек» на элементах разбиения,
- способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие В

### Свойства криволинейного интеграла первого рода.

#### 1. Линейность

а) свойство суперпозиции  $\int_L (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dl = \int_L f(x, y, z) dl + \int_L g(x, y, z) dl$

б) свойство однородности  $\int_L \lambda f(x, y, z) dl = \lambda \int_L f(x, y, z) dl$ .

Доказательство. Запишем интегральные суммы для интегралов в левых частях равенств. Так как в интегральной сумме число слагаемых конечно, перейдем к интегральным суммам для правых частей равенств. Затем перейдем к пределу, по теореме о предельном переходе в равенстве получим желаемый результат.

#### 2. Аддитивность.

Если  $L = L_1 \cup L_2$ , то  $\int_L f(x, y, z) dl = \int_{L_1} f(x, y, z) dl + \int_{L_2} f(x, y, z) dl$

Доказательство. Выберем разбиение области  $L$  так, чтобы ни один из элементов разбиения ( первоначально и при измельчении разбиения) не содержал одновременно как элементы  $L_1$ , так и элементы  $L_2$ . Это можно сделать по теореме существования (замечание к теореме). Далее проводится доказательство через интегральные суммы, как в п. 1.

<sup>10</sup> Здесь рассматривается непрерывная функция, более общий вариант см. в седьмом томе учебника

<sup>11</sup> Это требование может быть ослаблено, более общий вариант см. в седьмом томе учебника



3.  $\int_L dl = L$ . Здесь  $L$  – длина дуги  $L$ .

4. Если на дуге  $L$  выполнено неравенство  $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ , то

$$\int_L f(x, y, z) dl \geq \int_L g(x, y, z) dl$$

Доказательство. Запишем неравенство для интегральных сумм и перейдем к пределу. Заметим, что, в частности, возможно  $g(x, y, z) \equiv 0$

### 5. Теорема об оценке.

Если существуют константы  $m, M$ , что  $\forall (x, y, z) \in L \quad m \leq f(x, y, z) \leq M$ , то

$$mL \leq \int_L f(x, y, z) \leq ML$$

Доказательство. Интегрируя неравенство  $m \leq f(x, y, z) \leq M$  (свойство 4), получим  $\int_L m dl \leq \int_L f(x, y, z) dl \leq \int_L M dl$ . По свойству 1 константы  $m, M$  можно вынести из-под интегралов. Используя свойство 3, получим искомый результат.

### 6. Теорема о среднем (значении интеграла).

Существует точка  $c(x_c, y_c, z_c) \in L$ , что  $f(c) = \frac{1}{L} \int_L f(x, y, z) dl$

Доказательство. Так как функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $L$ , то существует ее нижняя грань  $\mu = \inf_L f(x, y, z)$  и верхняя грань  $M = \sup_L f(x, y, z)$ . Выполнено неравенство  $\forall (x, y, z) \in L \quad \mu L \leq \int_L f(x, y, z) dl \leq ML$ . Деля обе части на  $L$ , получим  $\mu \leq \frac{1}{L} \int_L f(x, y, z) dl \leq M$ . Но число  $\frac{1}{L} \int_L f(x, y, z) dl$  заключено между нижней и верхней гранью функции. Так как функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $L$ , то в некоторой точке  $c \in L$  функция должна принимать это значение. Следовательно,  $f(c) = \frac{1}{L} \int_L f(x, y, z) dl$ .

### Вычисление криволинейного интеграла первого рода.

Параметризуем дугу  $L$ :  $AB \quad x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ . Пусть  $t_0$  соответствует точке  $A$ , а  $t_1$  соответствует точке  $B$ . Тогда криволинейный интеграл первого рода сводится к определенному интегралу ( $dl = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$  - известная из 1 семестра формула для вычисления дифференциала длины дуги):

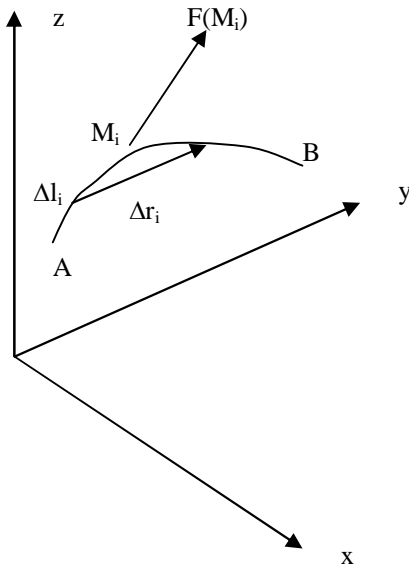
$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

*Пример.* Вычислить массу одного витка однородной (плотность равна  $k$ ) винтовой линии:  $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \varphi$ .

$$M = \int_0^{2\pi} k \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + 1} d\varphi = 2\pi k \sqrt{a^2 + 1}.$$

## Криволинейный интеграл 2 рода.

### Задача о работе силы.



Какую работу производит сила  $F(M)$  при перемещении точки  $M$  по дуге  $AB$ ?

Если бы дуга  $AB$  была отрезком прямой, а сила была бы постоянной по величине и направлению при перемещении точки  $M$  по дуге  $AB$ , то работу можно было бы вычислить по формуле  $A = (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = |\vec{F}| |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$ , где  $\varphi$  - угол между векторами. В общем случае эту формулу можно использовать для построения интегральной суммы, предполагая силу постоянной на элементе дуги  $\Delta l_i$  достаточно малой длины. Вместо длины малого элемента дуги можно взять длину стягивающей ее хорды  $|\overrightarrow{\Delta r_i}|$ , так как эти величины – эквивалентные бесконечно малые величины при условии  $\text{diam} \Delta l_i \rightarrow 0$  (первый семестр).

1. Организуем разбиение области- дуги  $AB$  на элементы – элементарные дуги  $\Delta l_i$  так, чтобы эти элементы не имели общих внутренних точек и  $L = \bigcup_{i=1}^n \Delta l_i$  (**условие A**)
2. Отметим на элементах разбиения «отмеченные точки»  $M_i$  и вычислим в них значения функции  $(\vec{F}(M_i))$
3. Построим интегральную сумму  $\sum_{i=1}^n (\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta r_i})$ , где  $\overrightarrow{\Delta r_i}$  вектор, направленный по хорде, стягивающей -дугу  $\Delta l_i$ .
4. Переходя к пределу при условии  $\max_i \text{diam}(\Delta l_i) \rightarrow 0$  (**условие B**), получим криволинейный интеграл второго рода как предел интегральных сумм (и работу силы):

$$\int_{AB} (\vec{F}, \overrightarrow{dr}) = \lim_{\max_i \text{diam} \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta r_i}). \text{ Часто обозначают } \vec{F}(M) \equiv \vec{a}(M)$$

### Теорема существования.

Пусть вектор - функция  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  непрерывна на кусочно-гладкой дуге  $L$ <sup>12</sup>. Тогда криволинейный интеграл второго рода существует как предел интегральных сумм.

$$\int_{AB} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = \lim_{\max_i \text{diam} \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{a}(M_i), \overrightarrow{\Delta r_i}).$$

<sup>12</sup> Это требование может быть ослаблено, более общий вариант см. в седьмом томе учебника

*Замечание.* Предел этот не зависит от

- способа выбора разбиения, лишь бы выполнялось условие А
- выбора «отмеченных точек» на элементах разбиения,
- способа измельчения разбиения, лишь бы выполнялось условие В

### Свойства криволинейного интеграла 2 рода.

#### 1. Линейность

а) свойство суперпозиции 
$$\int_L ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \vec{dr}) = \int_L (\vec{a}_1, \vec{dr}) + \int_L (\vec{a}_2, \vec{dr})$$

б) свойство однородности 
$$\int_L \lambda (\vec{a}, \vec{dr}) = \lambda \int_L (\vec{a}, \vec{dr}).$$

Доказательство. Запишем интегральные суммы для интегралов в левых частях равенств. Так как в интегральной сумме число слагаемых конечно, используя свойство скалярного произведения, перейдем к интегральным суммам для правых частей равенств. Затем перейдем к пределу, по теореме о предельном переходе в равенстве получим желаемый результат.

#### 2. Аддитивность.

Если  $L = L_1 \cup L_2$ , то 
$$\int_L (\vec{a}, \vec{dr}) = \int_{L_1} (\vec{a}, \vec{dr}) + \int_{L_2} (\vec{a}, \vec{dr}).$$

Доказательство. Выберем разбиение области  $L$  так, чтобы ни один из элементов разбиения ( первоначально и при измельчении разбиения) не содержал одновременно как элементы  $L_1$ , так и элементы  $L_2$ . Это можно сделать по теореме существования (замечание к теореме). Далее проводится доказательство через интегральные суммы, как в п.1.

#### 3. Ориентируемость.

$$\int_L (\vec{a}, \vec{dr}) = - \int_{-L} (\vec{a}, \vec{dr})$$

Доказательство. Интеграл по дуге  $-L$ , т.е. в отрицательном направлении обхода дуги есть предел интегральных сумм, в слагаемых которых вместо  $\vec{\Delta r}_i$  стоит  $(-\vec{\Delta r}_i)$ . Вынося «минус» из скалярного произведения и из суммы конечного числа слагаемых, переходя к пределу, получим требуемый результат.

Заметим, что свойство ориентируемости в криволинейном интеграле первого рода отсутствует. Зато в криволинейном интеграле второго рода отсутствуют свойства интегрирования неравенств, теорема об оценке и теорема о среднем, которые есть в криволинейном интеграле первого рода.

### Вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Пусть  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ . Запишем  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ .

Тогда криволинейный интеграл второго рода можно записать в виде

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Параметризуем дугу  $L = AB$ :  $L = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} A = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \\ B = (x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \end{matrix}$ ,

$\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$  непрерывны, так как дуга гладкая. Подставим эти выражения в криволинейный интеграл, он превратится в определенный интеграл по параметру.

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t))dt$$

*Пример.* Вычислить  $\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$ , где  $\vec{a} = (x, y, 1)$ ,  $L = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = lt \end{cases}$  - один виток винтовой

линии,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t + l]dt = 2\pi l.$$

*Пример.* Вычислить интеграл  $\int_{AB} x^2 dx + yx dy$  по трем различным дугам, соединяющим точки  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$   $L_1 : y = x$ ,  $L_2$  - ломаная, соединяющая точки  $A, C(1,0), B$ ,  $L_3 : y = x^2$ .

$$1) L_1 : y = x, dy = dx \quad \int_{L_1} x^2 dx + yx dy = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$2) L_2 = AC \cup CB, AC : y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq 1, CB : x = 1, dx = 0, 0 \leq y \leq 1$$

$$\int_{L_2} x^2 dx + yx dy = \int_{AC} + \int_{CB} = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$3) \int_{L_3} x^2 dx + yx dy = \int_0^1 (x^2 + x^3(2x))dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

*Пример.* Показать, что  $\int_L \frac{y^2}{2} dx + yx dy = \frac{1}{2}$  по всем указанным выше дугам.

## Лекция 6. Формула Грина.

**Теорема (формула) Грина.** Пусть  $G$  – плоская односвязная область с кусочно-гладкой границей  $L$ . Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по своим переменным в области  $G$  и на  $L$ .

Тогда справедлива формула Грина

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

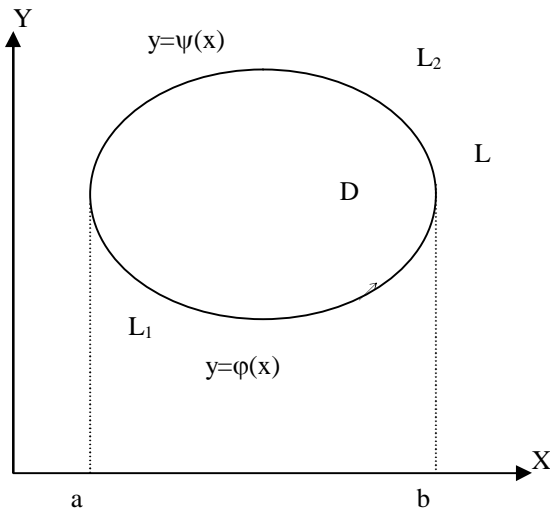
*Доказательство.* 1) Назовем плоскую область  $D$  (в плоскости  $OXY$ ) правильной, если любая прямая, параллельная координатной оси ( $OX$  или  $OY$ ) пересекает область не более,

чем в двух точках. Можно показать, что область  $G$  можно представить как объединение конечного числа правильных областей  $G = \bigcup_{k=1}^n D_k$ .

Тогда по свойству аддитивности двойной интеграл в правой части формулы Грина равен сумме двойных интегралов по правильным областям. Криволинейный интеграл в левой части равен сумме криволинейных интегралов по границам правильных областей, так как криволинейные интегралы по общим границам любых правильных областей различны по знаку из-за различных направлений обхода границы и взаимно уничтожаются при суммировании.

Поэтому доказательство может быть проведено для правильной области  $G$ .

2) Пусть  $G$  – правильная область. Так как  $P, Q$  могут быть произвольными функциями, то формула Грина сводится двум формулам  $\oint_L P(x, y)dx = \iint_G \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$  и  $\oint_L Q(x, y)dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$ , каждую из которых надо доказать. Докажем первую формулу, вторая доказывается аналогично.



$$\begin{aligned} \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \right) dx = - \int_a^b P(x, y) \Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx \\ &= - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx + \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx = \\ &= - \int_{L_2} P(x, y) dx + \int_{L_1} P(x, y) dx = \\ &= \int_{L_2} P(x, y) dx + \int_{L_1} P(x, y) dx = \int_{L_1 \cup L_2} P(x, y) dx = \int_L P(x, y) dx \end{aligned}$$

### Вычисление площади области по формуле Грина.

По свойству 3 двойного интеграла площадь области  $D$  можно вычислить по формуле

$$S_D = \iint_D dx dy. \text{ Поэтому достаточно выбрать } P, Q \text{ так, чтобы } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1, \text{ чтобы с}$$

помощью криволинейного интеграла по формуле Грина можно было бы вычислять площадь области.

Например, можно выбрать  $Q=x, P=0$ . Тогда  $S = \oint_L x dy$ . Можно выбрать  $Q=0, P=y$ , тогда

$$S = - \oint_L y dx. \text{ Очень полезна бывает симметричная формула при}$$

$$Q = \frac{x}{2}, P = -\frac{y}{2}, S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

*Пример.* Вычислить площадь эллипса с полуосями  $a, b$  ( $x = a \cos t, y = b \sin t$ )

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t - b \sin t a (-\sin t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

### Полный дифференциал и его вычисление.

**Теорема (о полном дифференциале).** Для того чтобы выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dV(x, y)$  - было полным дифференциалом некоторой функции  $V(x, y)$  - потенциала, необходимо и достаточно, чтобы в условиях формулы Грина было выполнено одно из следующих четырех условий (эквивалентных условий полного дифференциала)

- 1)  $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  зависит только от начальной А и конечной В точек дуги  $AB \subset G$  и не зависит от формы дуги (не зависит от пути интегрирования),
- 2)  $\oint_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  для любого кусочно-гладкого контура  $\gamma \subset G$ ,
- 3)  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x, y) \in G$ ,
- 4)  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dV(x, y) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$ .

*Доказательство.* Схема доказательства теоремы 4)  $\rightarrow$  3)  $\rightarrow$  2)  $\rightarrow$  1)  $\rightarrow$  4). По этой цепочке можно последовательно добраться от любого пункта к любому другому.

4)  $\rightarrow$  3) Дополнительно предположим, что существуют и непрерывны вторые смешанные производные функции V. Тогда они равны.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

3)  $\rightarrow$  2). Это следует из формулы Грина.

2)  $\rightarrow$  1). Пусть точки А, В соединены двумя дугами  $L_1$  и  $L_2$ . Тогда из них можно составить контур  $\gamma : L_1 \cup -L_2$ , интеграл вдоль которого по п.2 равен нулю.

$$0 = \oint_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_1 \cup -L_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{L_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Поэтому  $\int_{L_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ .  
 1)  $\rightarrow$  4). Докажем, что  $V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  - потенциал, то есть, что

$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y)$ . Докажем первое соотношение, второе доказывается аналогично.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x, y) - V(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy \right) =$$

Заметим, что такая запись интеграла показывает, что интеграл не зависит от формы дуги. Поэтому мы можем в первом интеграле провести дугу через точку  $(x, y)$ , чтобы в первом и втором интеграле сократились интегралы по дуге, соединяющей начальную точку с точкой  $(x, y)$ . В первом интеграле выберем в качестве дуги, соединяющей точку  $(x, y)$  с

точкой  $(x+\Delta x)$  отрезок прямой, параллельный оси ОХ. На этом отрезке  $y$  не изменяется, поэтому  $dy=0$

Тогда, продолжая равенство, получим

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(x,y) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} P(x+\theta \Delta x, y) \Delta x =$$

(здесь мы перешли от криволинейного интеграла к определенному, так как дуга интегрирования – отрезок, параллельный оси ОХ и применили теорему о среднем для определенного интеграла). Теперь используем непрерывность функции  $P(x, y)$  по переменной  $x$ .

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x+\theta \Delta x, y) = P(x, y). \text{ Первое соотношение доказано.}$$

Для доказательства второго соотношения варьируется переменная  $y$ , дуга, соединяющая точки  $(x_0, y_0)$ , и  $(x, y+\Delta y)$  проводится через точку  $(x, y)$  и далее по отрезку, параллельному оси ОУ, соединяющему точки  $(x, y)$  и  $(x, y+\Delta y)$ .

### Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть выполнены условия теоремы о полном дифференциале и пусть выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dV(x, y)$  - полный дифференциал, а функция  $V(x, y)$  - потенциал.

Тогда справедлива **формула Ньютона – Лейбница**

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1), \text{ где } V(x, y) - \text{ потенциал.}$$

*Доказательство.* В теореме о полном дифференциале доказано, что потенциал можно

записать в виде  $V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ . Так как интеграл не зависит от пути

интегрирования, то дугу, соединяющую точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  можно провести через точку

$(x_0, y_0)$ . Поэтому  $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_0, y_0)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1).$$

### Теорема (о полном дифференциале) для пространственной кривой.

Пусть дуга АВ лежит на кусочно-гладкой поверхности  $S$ , пусть функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные на  $S$ . Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны.

1)  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  не зависит от формы дуги (от пути интегрирования), а зависит только от начальной и конечной точек дуги.

2) Для любого замкнутого контура  $\gamma \subset S$   $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$

3)  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \forall (x, y, z) \in S$

4)  $Pdx + Qdy + Rdz = dV(x, y, z)$ ,  $P = \frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial V}{\partial z}$ .  $V(x, y, z)$  - полный дифференциал.

*Доказательство.* Доказательство аналогично двумерному случаю, схема доказательства та же: 4)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  1)  $\Rightarrow$  4). Докажите ее самостоятельно.

4)  $\Rightarrow$  3) проводится по теореме о смешанных производных так же как в двумерном случае.

3)  $\Rightarrow$  2) проводится по теореме Стокса (будет сформулирована и доказана ниже).

2)  $\Rightarrow$  1) доказательство полностью аналогично двумерному случаю.

1)  $\Rightarrow$  4) доказательство аналогично двумерному случаю.

*Замечание.* Формула Ньютона-Лейбница справедлива в трехмерном случае и доказывается так же.

### Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала.

Криволинейный интеграл от полного дифференциала можно вычислять двумя способами.

1) Можно выбирать удобный путь интегрирования, например, состоящий из отрезков, параллельных ОХ и ОУ. На отрезке, параллельном ОХ,  $dy=0$ , так как  $y$  не изменяется на этом отрезке. На отрезке, параллельном ОУ,  $dx=0$ , так как  $x$  не

изменяется на этом отрезке. Тогда  $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_1)} P(x, y_1)dx + \int_{(x_2, y_1)}^{(x_2, y_2)} Q(x_2, y)dy$$

2) Можно восстановить потенциал, как это делалось на первом курсе при решении дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и применить формулу Ньютона-Лейбница.

*Пример.* Вычислить интеграл  $\int_{(1,2)}^{(3,6)} ydx + xdy$ .

$$1) \int_{(1,2)}^{(3,6)} ydx + xdy = \int_1^3 2dx + \int_2^6 3dy = 4 + 12 = 16$$

$$2) \frac{\partial V}{\partial x} = y \Rightarrow V = xy + g(y) + C_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x \Rightarrow V = xy + h(x) + C_2.$$

Сравнивая две записи потенциала, получим  $V = xy + C$ .

$$\int_{(1,2)}^{(3,6)} ydx + xdy = V(3,6) - V(1,2) = 18 + C - (2 + C) = 16.$$

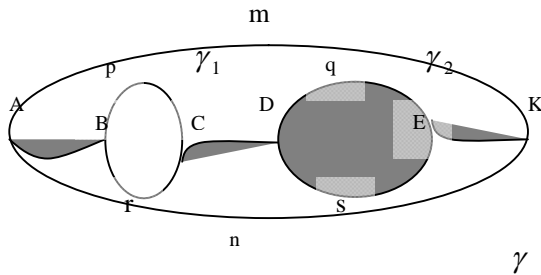
Заметим, что аналогично вычисляется криволинейный интеграл от полного дифференциала по пространственной кривой.



### Формула Грина для многосвязной области.

Пусть кусочно-гладкие контуры  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  лежат внутри контура  $\gamma$  и вне друг друга. Пусть  $P(x, y), Q(x, y)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным  $x, y$  в области между контурами и на самих этих контурах. Тогда

$$\oint_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



Соединим контуры линиями АВ, CD, ЕК.

По формуле Грина для односвязной области криволинейные интегралы по контуру  $ABpCDqEKmA$  и по контуру  $AnKEsDCrBA$  равны двойным интегралам для верхней  $D_{\text{верх}}$  и нижней  $D_{\text{нижн}}$  областей.

Представим эти интегралы как сумму интегралов по составляющим контуры дугам и сложим эти интегралы, сокращая интегралы по одним и тем же дугам в разных направлениях

$$\oint_{ABpCDqEKmA} Pdx + Qdy = \int_{AB} + \int_{BpC} + \int_{CD} + \int_{DqE} + \int_{EK} + \int_{KmA} = \iint_{D_{\text{верх}}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_{AnKEsDCrBA} Pdx + Qdy = \int_{BA} + \int_{CrB} + \int_{DC} + \int_{EsD} + \int_{KE} + \int_{AnK} = \iint_{D_{\text{нижн}}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Складывая интегралы, получим

$$\int_{BpCrB} + \int_{DqEsD} + \int_{KmAnK} = -\oint_{\gamma_1} f(z)dz - \oint_{\gamma_2} f(z)dz + \oint_{\gamma} f(z)dz = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Отсюда имеем

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy - \oint_{\gamma_1} Pdx + Qdy - \oint_{\gamma_2} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \text{ Теорема доказана для}$$

случая  $n = 2$ . Для  $n > 2$  доказательство аналогично.

**Следствие 1.** Пусть  $Pdx + Qdy$  – полный дифференциал и  $n=1$ .

Тогда  $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \oint_{\gamma_1} Pdx + Qdy$ . Поэтому, если в какой-либо точке нарушается

непрерывность функций,  $P, Q$  или их частных производных, то интеграл может быть взят по любому кусочно-гладкому не самопересекающемуся контуру, охватывающему эту точку (мы получим один и тот же результат).

**Следствие 2.** Пусть  $Pdx + Qdy$  – полный дифференциал. Если кусочно-гладкий контур  $\gamma$  один раз охватывает некоторую точку,  $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = W$ , а контур  $L$   $n$  раз охватывает эту

точку, то в условиях теоремы  $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = nW$ . Докажите это самостоятельно.

## Лекция 7. Поверхностные интегралы.

### Задача о массе поверхности.

Задача о массе поверхности приводит нас к *поверхностному интегралу 1 рода*, точно так же, как задача о массе кривой привела нас к криволинейному интегралу первого рода.

Пусть в каждой точке кусочно-гладкой поверхности  $\sigma$  задана поверхностная плотность  $f(x, y, z)$ .

1. Введем разбиение  $\sigma$  на элементарные области  $\Delta\sigma_i$  – элементы разбиения так, чтобы они не имели общих внутренних точек (*условие А*).
2. Отметим точки  $M_i$  на элементах разбиения  $\Delta\sigma_i$ . Вычисляем  $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$  и считаем плотность постоянной и равной  $f(M_i)$  на всем элементе разбиения  $\Delta\sigma_i$ . Приблизительно вычислим массу ячейки разбиения как  $f(M_i) \Delta\sigma_i$ . Приблизительно вычислим массу поверхности  $\sigma$ , просуммировав массы ячеек (составим интегральную сумму)  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i$ . В интегральной сумме  $\Delta\sigma_i$  – это площадь поверхности элементарной ячейки. Здесь, как и ранее, традиционно употребляется одно и то же обозначение для самой элементарной ячейки и для ее площади.
3. Измельчаем разбиение и переходим к пределу в интегральной сумме при условии  $\max_i \text{diam} \Delta\sigma_i \rightarrow 0$  (*условие В*). Получаем **поверхностный интеграл первого рода**, который равен массе поверхности (если только  $f(M_i) > 0$  на поверхности).

$$m_\sigma = \iint_\sigma f(M) d\sigma = \lim_{\max_i \text{diam} \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i.$$

**Теорема существования.** Пусть функция  $f(M) = f(x, y, z)$  непрерывна на кусочно-гладкой ограниченной поверхности  $\sigma$ . Тогда поверхностный интеграл первого рода существует как предел интегральных сумм.

$$\iint_\sigma f(M) d\sigma = \lim_{\max_i \text{diam} \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i.$$

*Замечание.* Интеграл (как предел интегральных сумм) не зависит:

- 1) от выбора разбиения поверхности (лишь бы выполнялось условие А),
- 2) от выбора отмеченных точек на элементах разбиения,
- 3) от способа измельчения разбиения (лишь бы выполнялось условие В).

### Свойства поверхностного интеграла первого рода.

(они аналогичны по формулировке и доказательству свойствам рассмотренных ранее интегралов первого рода).

$$1) \text{ Линейность. } \iint_\sigma (\lambda f + \mu g) d\sigma = \lambda \iint_\sigma f d\sigma + \mu \iint_\sigma g d\sigma$$

$$2) \text{ Аддитивность } \iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f d\sigma = \iint_{\sigma_1} f d\sigma + \iint_{\sigma_2} f d\sigma$$

$$3) \iint_\sigma d\sigma = S_\sigma - \text{площадь поверхности.}$$

$$4) \text{ Если } f(x, y, z) \geq g(x, y, z), \text{ то } \iint_\sigma f d\sigma \geq \iint_\sigma g d\sigma \text{ (если } f \geq 0, \text{ то } \iint_\sigma f d\sigma \geq 0),$$

$$5) \text{ Теорема об оценке. Если } m \leq f(x, y, z) \leq M, \text{ то } mS_\sigma \leq \iint_\sigma f d\sigma \leq MS_\sigma,$$

б) **Теорема о среднем.** Пусть функция  $f(M) = f(x, y, z)$  непрерывна на кусочно-гладкой ограниченной поверхности  $\sigma$ . Тогда на поверхности найдется точка  $C$ ,

$$\text{такая что } f(C) = \frac{1}{S_\sigma} \iint_\sigma f(x, y, z) d\sigma$$

*Доказательство.* Первые четыре свойства доказываются аналогично подобным свойствам в двойном, тройном интегралах, криволинейном интеграле первого рода (записью соотношений в интегральных суммах и предельным переходом). Во втором свойстве используется возможность такого разбиения поверхности на две части, чтобы ни один элемент разбиения не содержал граничные точки этих частей в качестве своих внутренних точек.

Теорема об оценке следует из свойств 3, 4.

Теорема о среднем, как и ранее, использует теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши для функций, непрерывных на замкнутых ограниченных множествах.

### Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Раньше во второй лекции мы вычисляли площадь поверхности с помощью двойного интеграла, то есть сводили интеграл  $\iint_\sigma d\sigma$  к двойному интегралу. Теперь нам надо свести

интеграл  $\iint_\sigma f(x, y, z) d\sigma$  к двойному интегралу. Повторяя вновь те же выкладки с той лишь разницей, что под интегралом стоит функция  $f(x, y, z)$ , получим аналогичную формулу для поверхности, заданной соотношением  $z = \varphi(x, y)$

$$\iint_\sigma f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2} dx dy.$$

Если поверхность задана уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , точно так же получим формулу

$$\iint_\sigma f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z) \sqrt{1 + \frac{F_x'^2}{F_z'^2} + \frac{F_y'^2}{F_z'^2}} dx dy. \text{ Здесь надо учитывать, что точка } (x, y, z)$$

лежит на поверхности  $\sigma$ .

*Пример.* Найти массу поверхности однородной полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0$  с постоянной поверхностной плотностью  $W$ .

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad F_x' = 2x, \quad F_y' = 2y, \quad F_z' = -2z.$$

Обозначим  $D$  - круг - проекцию полусферы на плоскость  $OXY$ .

$$\begin{aligned} m_\sigma &= \iint_D 2W \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2z} dx dy = 2WR \iint_D \frac{1}{2z} dx dy = WR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = \\ &= \frac{2\pi RW}{2} \left( -2\sqrt{R^2 - \rho^2} \right) \Big|_0^R = 2\pi R^2 W. \end{aligned}$$

### Поверхностный интеграл второго рода.

Поверхность  $\sigma$  называется **ориентируемой**, если в каждой ее точке существует вектор нормали к  $\sigma$ , - непрерывная вектор - функция на  $\sigma$ .

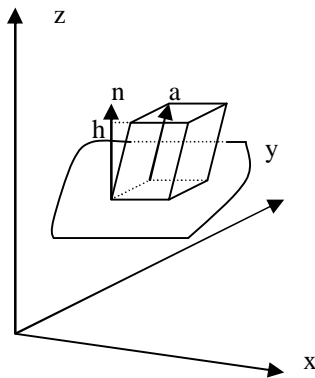
Поверхность  $\sigma$  называется **односторонней**, если при обходе поверхности  $\sigma$  по контуру  $\gamma$  вектор нормали меняет свое направление на противоположное.

Поверхность  $\sigma$  называется **двусторонней**, если при обходе поверхности  $\sigma$  по контуру  $\gamma$  вектор нормали не меняет свое направление.

Примером односторонней поверхности является петля Мебиуса, примерами двусторонних поверхностей – плоскость, сфера, гиперboloиды и т.д.

### Задача о потоке жидкости через поверхность.

Поток жидкости через поверхность  $\sigma$  – это количество жидкости, протекающее через поверхность  $\sigma$  в единицу времени.



Пусть на элементе поверхности  $\sigma$  площадке  $d\sigma$  в некоторой ее точке  $M$  проведен вектор  $\vec{a}$  перемещения частицы жидкости через площадку  $d\sigma$  в единицу времени. Предполагаем, что для всех точек  $d\sigma$  перемещение одинаково по величине и направлению. Поток жидкости можно вычислить как объем наклонного (по направлению вектора перемещений) параллелепипеда, построенного на  $d\sigma$ . Этот объем равен  $d\Pi = h d\sigma = pr_{\vec{n}} \vec{a} d\sigma = \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности. Тогда поток жидкости равен  $\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma$

Здесь мы вычисляли дифференциал потока, а затем интегрировали по всей поверхности – это метод дифференциалов при построении интеграла.

Можно строить интеграл с помощью метода интегральных сумм, как мы действовали обычно.

- Введем разбиение области на элементы так, чтобы соседние элементы не содержали общих внутренних точек (*условие A*),
- на элементах разбиения отметим точку  $M$ . Предполагая перемещение частиц жидкости постоянным на элементе и равным  $\vec{a}(M)$ , вычислим приближенно поток через элемент разбиения и просуммируем его по элементам, получая интегральную сумму  $\Delta\Pi_i = \sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)$ .

- Измельчим разбиение при условии  $\max_i \Delta\sigma_i \rightarrow 0$  (*условие B*) и перейдем к пределу получая поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{\max_i \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i).$$

По виду это – поверхностный интеграл первого рода, он и имеет те же свойства, что поверхностный интеграл первого рода, но имеет еще и свойство ориентируемости. Интеграл по внешней стороне поверхности отличается знаком от интеграла по внутренней стороне поверхности, так как на различных сторонах поверхности нормали в той же точке нормали направлены по одной прямой в различные стороны.

Теорема существования формулируется так же, как для поверхностного интеграла первого рода с тем же замечанием о независимости интеграла от способа выбора разбиения (лишь бы выполнялись условия A), от выбора точек на элементах разбиения, от способа измельчения разбиения (лишь бы выполнялось условие B).

### Запись поверхностного интеграла второго рода.

Запишем вектор перемещений частиц и нормаль в точке  $M(x, y, z)$ , выделяя скалярные компоненты векторов

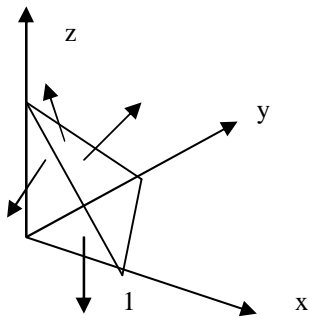
$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}, \quad \vec{n}(M) = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M) = P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma$$

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) d\sigma = \pm \iint_{\sigma} P dydz \pm \iint_{\sigma} Q dx dz \pm \iint_{\sigma} R dx dy$$

$d\sigma \cos\alpha = \pm dydz$ ,  $d\sigma \cos\beta = \pm dx dz$ ,  $d\sigma \cos\gamma = \pm dx dy$ . Знак «+» выбирается, если угол между нормалью к поверхности и осью (OX в первом интеграле, OY во втором, OZ в третьем) острый, знак «-» выбирается, если угол тупой. В самом деле, в поверхностных интегралах площади элементов поверхности положительны, а знаки «+» или «-» компенсируют знак косинуса угла между нормалью и координатной осью. При переходе от поверхностных интегралов к двойным одна из координат подставляется из уравнения поверхности, чтобы точка  $(x, y, z)$  находилась на поверхности  $\sigma$ .

*Пример.* Найти поток радиуса-вектора через полную поверхность тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью  $x + y + z = 1$



Поток радиус-вектора через координатные плоскости нулевой, так как на них радиус-вектор точки лежит в координатной плоскости и ортогонален нормали к координатной плоскости, т.е.  $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ .

Вычислим поток через грань тетраэдра, лежащую в плоскости  $x + y + z = 1$ . Он и будет суммарным потоком, так как поток через остальные грани нулевой. Для этой грани

$$\vec{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \vec{a} = \vec{r} = \{x, y, z\}, \quad \text{площадь грани} - \text{треугольника}$$

по теореме Пифагора равна  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (проверьте).

Поток равен

$$\Pi = \iint_{\Delta} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Delta} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Поток равен } \Pi = \iint_{\Delta} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим поток через двойные интегралы проектированием на координатные плоскости. Поток радиус-вектора через координатные плоскости нулевой. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Delta} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{yz}} x dydz + \iint_{D_{xz}} y dx dz + \iint_{D_{xy}} z dx dy = 3 \iint_{D_{xy}} z dx dy = 3 \iint_{D_{xy}} z(x, y) dx dy = \\ &= 3 \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx = 3 \int_0^1 \left( (1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Получили тот же результат.

## Лекция 8

### Скалярное и векторное поля.

Говорят, что в области (плоской или пространственной) задано **скалярное поле**  $\varphi (M)$ , если в этой области задана скалярная функция  $\varphi (M)$ .

Говорят, что в области (плоской или пространственной) задано **векторное поле**  $\vec{a} (M)$ , если в этой области задана векторная функция  $\vec{a} (M)$ .

Например, масса или температура частиц в комнате – скалярные поля, скорость или силы взаимодействия частиц – векторные поля.

В интегралах первого рода :двойных, криволинейных, поверхностных мы имели дело со скалярным полем – распределением масс точек кривой или поверхности в пространстве.

В интегралах второго рода вычислялись характеристики векторных полей: работа векторного поля (силового поля) в криволинейном интеграле, поток векторного поля в поверхностном интеграле.

Рассмотрим подробнее основные характеристики скалярных и векторных полей.

### Скалярные поля.

**Линии уровня** плоского поля  $\varphi (x, y)$  – кривые, на которых значения функции постоянны  $\varphi (x, y) = C$ .

Например, линии равной высоты, нанесенные на географической карты ( $h (x, y) = 0$  – уровень моря,  $h = 7000\text{м}$  – немногие горные вершины,  $h = - 10000\text{м}$  – самые глубокие океанские впадины).

**Поверхности уровня** пространственного поля  $\varphi (x, y, z)$  – поверхности, на которых значения функции постоянны  $\varphi (x, y, z) = C$ .

Например, поверхности равной температуры или давления в атмосфере. Любая линия на поверхности уровня – это линия уровня.

Пример. Задано поле  $x^2 + y^2 - z^2 = C$ . При  $C > 0$  поверхности уровня – однополостные гиперболоиды, при  $C = 0$  поверхность уровня – конус, при  $C < 0$  поверхности уровня – двуполостные гиперболоиды.

*Линии или поверхности различных уровней не пересекаются.*

*Чем чаще (гуще) поверхности или линии уровня, тем интенсивнее изменение поля.*

**Градиент поля** – вектор  $\overrightarrow{grad\varphi} = \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right\}$ .

**Утверждение.** Градиент скалярного поля ортогонален его поверхности уровня.

*Доказательство.* Пусть точка  $(x, y, z)$  остается на поверхности уровня  $g(x, y, z) = 0$  при вариациях переменных. Тогда равенство превращается в тождество, а тождество можно дифференцировать.

$$dg(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = \overrightarrow{grad\ g} \cdot \vec{dr} = 0.$$

Вектор  $\vec{dr} (x, y, z)$  - это вектор, касательный в точке  $(x, y, z)$  к любой кривой, лежащей на поверхности уровня, проходящей через эту точку. Поэтому в точке  $(x, y, z)$  вектор градиента ортогонален всем касательным к линии уровня, проходящим через эту точку. Следовательно, он ортогонален касательной плоскости к поверхности уровня и направлен по нормали к поверхности уровня.

**Производная скалярного поля по направлению**  $\vec{l}$  определяется как  $\frac{\partial g}{\partial l}|_M = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(M + t\vec{l}) - g(M)}{t}$ . Известно из теории функций многих переменных (выпуск V учебника), что *производная по направлению есть проекция градиента на данное направление*

$$\frac{\partial g}{\partial l}|_M = \frac{\vec{\text{grad}}g \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

*Пример.* Найти производную скалярного поля  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$  по направлению  $\{1, 3, 2\}$  в точке  $(1, 0, 4)$

$$\vec{\text{grad}}g = \{2x, 2y, 3z^2\}, \quad \frac{\partial g}{\partial l}|_{(1,0,4)} = \{2, 0, 48\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right\} = \frac{98}{\sqrt{14}}.$$

### Векторное поле.

**Векторная линия** - линия, в каждой точке которой вектор поля направлен по касательной к ней.

Уравнения векторной линии легко получить из условия коллинеарности векторов поля  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  и касательной  $\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

*Пример.* Написать уравнения векторных линий векторного поля  $\vec{a}(M) = y\vec{i} - x\vec{j}$

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ ,  $-x dx = y dy$ ,  $x dx + y dy = 0$ ,  $d(x^2 + y^2) = 0$ ,  $x^2 + y^2 = C$  - линии уровня - окружности ( $C > 0$ ).

**Векторной трубкой** называется поверхность, образованная векторными линиями.

### Формула Остроградского – Гаусса.

Пусть компоненты векторного поля  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные в пространственно односвязной замкнутой области  $V$  и на ее кусочно гладкой границе  $\sigma$ .

Тогда справедлива *формула Остроградского – Гаусса*

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

Заметим, что левая часть формулы представляет собой поток векторного поля  $\vec{a}(M)$  через поверхность  $\sigma$ .

*Доказательство.* 1) Формула Остроградского – Гаусса, в силу произвольности  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  состоит из трех частей, в каждую из которых входит одна из компонент векторного поля  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . В самом деле, можно взять  $P = 0$ ,  $Q = 0$  и доказывать отдельно часть формулы в которую входит только  $R$ . Остальные части формулы (при  $P = 0$ ,  $R = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $R = 0$ ) доказываются аналогично. Будем доказывать часть формулы

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dv$$

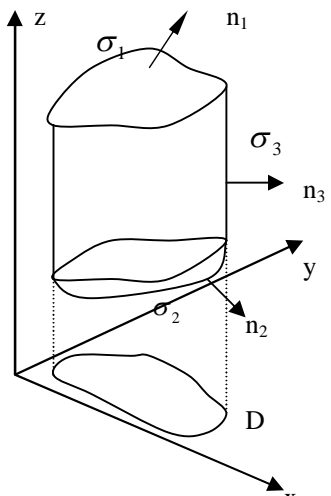
2) Для доказательства выбранной части формулы представим пространственную область  $V$  в виде объединения конечного числа цилиндрических тел, не имеющих общих внутренних точек, с образующими, параллельными оси  $OZ$ . Доказательство можно

проводить для цилиндрического тела. В самом деле, тройной интеграл в правой части равен сумме тройных интегралов по цилиндрическим телам (свойство аддитивности). Поверхностный интеграл в левой части также равен сумме поверхностных интегралов по полным поверхностям цилиндрических тел, причем при суммировании интегралы по общим границам соседних цилиндрических тел будут сокращаться из-за противоположного направления внешних нормалей на общих границах.

Итак, будем доказывать соотношение  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dv$  для цилиндрического тела  $V$ , проектирующегося в область  $D$  на плоскости  $OXY$ . Пусть «верхняя» граница цилиндрического тела – поверхность  $\sigma_1$  описывается уравнением  $z = z_1(x, y)$ , «нижняя» граница – поверхность  $\sigma_2$  описывается уравнением  $z = z_2(x, y)$ . Боковую поверхность цилиндрического тела, параллельную оси  $OZ$ , обозначим  $\sigma_3$ .

Сразу заметим, что поток векторного поля через боковую поверхность равен нулю. Действительно,  $\iint_{\sigma_3} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\sigma_3} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = 0$ , так как нормаль на боковой поверхности ортогональна оси  $OZ$  и  $\cos \gamma = 0$ .

Заметим также, что на «верхней» поверхности  $\sigma_1$   $\cos \gamma > 0$ , а на «нижней» поверхности  $\sigma_2$   $\cos \gamma < 0$ . Поэтому при переходе от поверхностного интеграла по  $\sigma_2$  к двойному интегралу по области  $D$  и обратно надо менять знак, а при переходе от поверхностного интеграла по  $\sigma_1$  к двойному интегралу по области  $D$  и обратно менять знак не надо.



$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D (R(x, y, z_1(x, y))) dx dy - \\ &= \iint_D (R(x, y, z_2(x, y))) dx dy = \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_3} R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dv$  доказано.

*Замечание.* Формулу Остроградского – Гаусса можно записать в «полевом» виде

$$P_{\sigma}(\vec{a}) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv - \text{поток векторного поля через замкнутую поверхность } \sigma \text{ равен}$$

объемному интегралу от дивергенции поля по области, ограниченной поверхностью  $\sigma$ .

**Дивергенция векторного поля** (расходимость) есть  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ .

Дивергенция – это характеристика векторного поля, инвариантная относительно системы координат. Покажем это.



### Инвариантное определение дивергенции.

Рассмотрим произвольную точку  $M$  в пространственной области  $V$ . Выберем ее окрестность  $V_M$  – шар радиуса  $r$  с центром в точке  $M$ . Обозначим  $\sigma_M$  – ее границу – сферу радиуса  $r$ . По теореме о среднем для тройного интеграла

$$\iiint_{V_M} \operatorname{div} \vec{a} \, dv = \operatorname{div} \vec{a}(\bar{M}) V_M, \quad \bar{M} \in V_M, \quad \operatorname{div} \vec{a}(\bar{M}) = \frac{1}{V_M} \iiint_{V_M} \operatorname{div} \vec{a} \, dv = \frac{1}{V_M} \oiint_{\sigma_M} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma \quad (\text{по})$$

формуле Остроградского – Гаусса).

Стягиваем окрестность к точке  $M$ , получаем дивергенцию векторного поля в точке  $M$ .

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{V_M \rightarrow M} \frac{\oiint_{\sigma_M} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma}{V_M}. \quad \text{Это и есть инвариантное определение дивергенции.}$$

Поэтому дивергенция векторного поля в точке  $M$  имеет смысл объемной плотности потока векторного поля через окрестность этой точки и характеризует мощность источника (если  $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$ ) или стока (если  $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ ) векторного поля в точке  $M$ .

Если  $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$ , то точка  $M$  – источник векторного поля, если  $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ , то точка  $M$  – сток векторного поля. Если в некоторой области дивергенция равна нулю, то в этой области нет ни источников, ни стоков, поток векторного поля через границу такой области равен нулю – «сколько поля втекает в область, столько и вытекает из нее».

*Пример.* Определить расположение источников и стоков векторного поля  $\vec{a} = x^2 y \vec{i} - xz y \vec{j} + xz^2 \vec{k}$ . Выяснить, является ли точка  $M(1,2,3)$  источником или стоком.

$\operatorname{div} \vec{a} = 2xy - xz + 2xz = 2xy + xz$ . Все точки, для которых  $2xy + xz > 0$  – источники, все точки, для которых  $2xy + xz < 0$  – стоки. На поверхности  $2xy + xz = 0$  нет ни источников, ни стоков. Точка  $M$  – источник, так как  $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 4 + 3 = 7 > 0$ .

### Свойства дивергенции.

1) Линейность.  $\operatorname{div}(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \operatorname{div} \vec{a}_1 + \lambda_2 \operatorname{div} \vec{a}_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) &= \operatorname{div}((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \vec{i} + (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) \vec{j} + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \vec{k}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) = \lambda_1 \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \right) = \\ &= \lambda_1 \operatorname{div} \vec{a}_1 + \lambda_2 \operatorname{div} \vec{a}_2. \end{aligned}$$

2)  $\operatorname{div} \vec{C} = 0$ , где  $\vec{C} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$  – постоянное векторное поле.

$$\operatorname{div} \vec{C} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0$$

3)  $\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi}$ , где  $\varphi(x, y, z)$  – скалярное поле.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \vec{a}) &= \operatorname{div}(\varphi P \vec{i} + \varphi Q \vec{j} + \varphi R \vec{k}) = \frac{\partial(\varphi P)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi R)}{\partial z} = \\ &= \varphi \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left( P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y} + R \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi}. \end{aligned}$$

### Соленоидальное поле и его свойства.

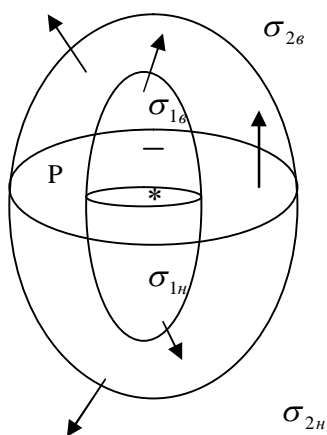
Векторное поле  $\vec{a}(M)$  называется *соленоидальным* в области  $V$ , если в любой точке  $M$  этой области  $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$ .

#### Свойства соленоидального поля.

- 1) Для того чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы поток через любую замкнутую поверхность равнялся нулю.

Необходимость следует из формулы Остроградского – Гаусса, достаточность – из инвариантного определения дивергенции.

- 2) Поток соленоидального поля через любую поверхность, окружающую изолированный источник или сток, один и тот же.



Рассмотрим две замкнутых поверхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , окружающие изолированный источник (сток). Будем считать векторное поле соленоидальным в пространственной области между поверхностями. Рассечем поверхности плоскостью  $P$  и выберем на ней «верхнюю» сторону плоскости и «нижнюю» сторону, введем на плоскости вектор нормали от «нижней» стороны к «верхней». Плоскость разделяет поверхности на «верхние» и «нижние» части. Обозначим на них направления внешних нормалей к поверхностям.

Рассмотрим две пространственных области. Одна из них лежит выше плоскости и ограничена верхними частями поверхностей и верхней частью плоскости. Вторая ограничена нижними частями поверхностей и нижней частью плоскости.

В той и другой области поле соленоидально. Следовательно,

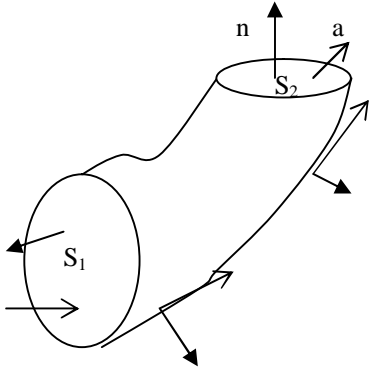
поток векторного поля через границы этих областей равен нулю.

$$P_g = -P_P + P_{\sigma_{2g}} - P_{\sigma_{1g}} = 0,$$

$$P_n = +P_P + P_{\sigma_{2n}} - P_{\sigma_{1n}} = 0.$$

Складывая эти выражения, получим  $P_{\sigma_1} = P_{\sigma_{1g}} + P_{\sigma_{1n}} = P_{\sigma_{2g}} + P_{\sigma_{2n}} = P_{\sigma_2}$ .

- 3) Поток соленоидального поля через произвольное сечение векторной трубки один и тот же.



Обозначим  $S_{\text{бок}}$  – боковую поверхность векторной трубки. На боковой поверхности направления нормали и векторного поля ортогональны, так как векторная трубка образована векторными линиями, а вектор поля направлен по касательной к векторной линии. Поэтому поток векторного поля через боковую поверхность векторной трубки равен нулю ( $\Pi_{S_{\text{бок}}} = 0$ ). Учитывая направления нормалей и вектора поля на сечениях векторной трубки  $S_1$  и  $S_2$ , а также соленоидальность поля, получим

$$-\Pi_{S_1} + \Pi_{S_{\text{бок}}} + \Pi_{S_2} = 0, \quad \Pi_{S_1} = \Pi_{S_2}.$$

*Следствие.* Векторные линии соленоидального поля не могут начинаться и заканчиваться внутри поля.

В самом деле, иначе конечный поток приходился бы на нулевую площадь источника или стока, что требовало бы бесконечной мощности источника или стока.

## Лекция 9 Формула Стокса.

### Ротор векторного поля.

Назовем **ротором** векторного поля  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  вектор

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

### Свойства ротора.

1) Линейность  $\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}_2$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 & \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 & \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda_1 P_1 & \lambda_1 Q_1 & \lambda_1 R_1 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda_2 P_2 & \lambda_2 Q_2 & \lambda_2 R_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}_2. \end{aligned}$$

2)  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} = 0$ ,  $\vec{C}$  - постоянное векторное поле.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\varphi \vec{a}) &= \overrightarrow{\varphi \text{rot} \vec{a}} + \overrightarrow{\text{grad} \varphi} \times \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}} \\
\overrightarrow{\text{rot}}(\varphi \vec{a}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(\varphi R)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial(\varphi P)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi R)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi P)}{\partial y} \right) \vec{k} \\
&= \\
&\varphi \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \varphi \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \varphi \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} + \\
&\left( R \frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( P \frac{\partial \varphi}{\partial z} - R \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \overrightarrow{\varphi \text{rot} \vec{a}} + \overrightarrow{\text{grad} \varphi} \times \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}.
\end{aligned}$$

### Теорема Стокса.

Пусть пространственно односвязная область  $V$  содержит кусочно-гладкую поверхность  $\sigma$  с кусочно-гладкой границей  $\gamma$ .

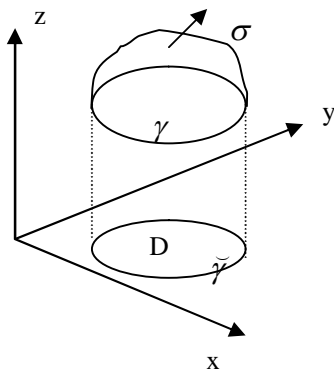
Пусть компоненты векторного поля  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по своим аргументам до второго порядка включительно в области  $V$ .

Тогда справедлива **формула Стокса**

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

*Замечание.* Нормаль к поверхности  $\sigma$  проведена так, чтобы наблюдатель, находясь на конце вектора нормали, видел бы обход контура  $\gamma$ , совершающимся в положительном направлении (так, чтобы область, границей которой является контур, при обходе контура находилась бы «по левую руку»).

*Доказательство теоремы Стокса.*



Как и формула Остроградского – Гаусса, формула Стокса состоит из трех независимых частей (в силу произвольности компонент векторного поля). Докажем одну из этих частей, остальные формулы доказываются аналогично. Докажем

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right) = \oint_{\gamma} P dx$$

- часть формулы Стокса, в которой содержится только компонента  $P$ .

Предположим, что поверхность  $\sigma$  описывается уравнением  $z = \varphi(x, y)$ . Тогда нормаль к поверхности

представляет собой вектор

$$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \left\{ \frac{\varphi'_x}{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}}, \frac{\varphi'_y}{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}} \right\}$$

Отсюда видно, что  $\cos \beta = -\varphi'_y \cos \gamma$ . Вспомним еще, что  $d\sigma \cos \beta = dx dz$ ,  $d\sigma \cos \gamma = dx dy$ .

$$\iint_{\sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right) = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma = \iint_{\sigma} \left( -\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma =$$

(на поверхности  $\sigma$   $z = \varphi(x, y)$ , поэтому под интегралом стоит частная производная P по y с учетом зависимости z от y на поверхности  $\sigma$ )

$$= - \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \iint_D \frac{\partial P(x, y, \varphi(x, y))}{\partial y} dx dy =$$

Используем формулу Грина для области D с ее границей  $\vec{\gamma}$ . Ее можно записать в виде

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\vec{\gamma}} P dx + Q dy. \text{ Нам понадобится только та ее часть, которая относится к}$$

функции P  $\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\vec{\gamma}} P dx$ . Продолжаем равенство дальше.

$$= - \oint_{\vec{\gamma}} P(x, y, \varphi(x, y)) dx = \oint_{\gamma} P(x, y, z) dx.$$

В самом деле, на контуре  $\gamma$   $z = \varphi(x, y)$ , а переменные x, y на том и другом контуре те же, так как контур  $\vec{\gamma}$  - это проекция контура  $\gamma$  на плоскость OXY (параллельно оси OZ).

Одна из частей формулы Стокса доказана.

**Линейным интегралом** векторного поля  $\vec{a}$  по дуге L называется криволинейный интеграл  $\int_L P dx + Q dy + R dz$ .

Линейный интеграл имеет смысл работы векторного поля при перемещении по дуге.

**Циркуляцией** векторного поля называется линейный интеграл по замкнутому контуру.

$$Ц_{\gamma}(\vec{a}) = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Вводя эти понятия, можно записать формулу Стокса в «полевой» форме

$$Ц_{\gamma}(\vec{a}) = \Pi_{\sigma}(\overrightarrow{rot} \vec{a}).$$

Мы определили ротор векторного поля в декартовой системе координат, однако ротор – это характеристика самого векторного поля. Поэтому необходимо дать определение ротора, которое не зависит от выбора системы координат.

### Инвариантное определение ротора.

Рассмотрим произвольную точку M в области V. Проведем через нее поверхность  $\sigma$ , границей которой служит контур  $\gamma$ . Пусть поверхность и контур удовлетворяют условиям теоремы Стокса. По теореме о среднем для поверхностного интеграла и формуле Стокса получим

$$\iint_{\sigma} \overrightarrow{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \overrightarrow{rot} \vec{a}(\vec{M}) \cdot \vec{n}(\vec{M}) \sigma = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Здесь, как и ранее  $\sigma$  - обозначение области и ее площади. Из этого соотношения, стягивая контур  $\gamma$  к точке  $M$ , получим

$$\overrightarrow{rot\vec{a}}(M) \cdot \vec{n}(M) = \lim_{\gamma \rightarrow M} \frac{\oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz}{\sigma}$$

Это и есть **инвариантное определение ротора**.

Правая часть формулы – это поверхностная плотность циркуляции векторного поля (энергии в точке  $M$  вращения векторного поля или работы векторного поля при вращении вокруг некоторого направления, определяемого вектором  $\vec{n}(M)$ ). Левая часть – это проекция ротора на это направление.

Если направление  $\vec{n}(M)$  совпадает с направлением ротора и  $\vec{n}(M)$  - единичный вектор, то левая часть равна модулю ротора. Поэтому **модуль ротора векторного поля равен максимальному значению поверхностной плотности циркуляции векторного поля**.

Левая часть достигает максимума при коллинеарности направления и ротора векторного поля. Поэтому **направление ротора векторного поля – это то направление, вокруг которого поверхностная плотность циркуляции векторного поля – наибольшая**.

*Пример.* Найти ротор линейной скорости вращения с постоянной угловой скоростью  $\omega$

Векторное поле линейной скорости  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k},$$

$$\overrightarrow{rot\vec{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} = 2\omega_x\vec{i} + 2\omega_y\vec{j} + 2\omega_z\vec{k} = 2\vec{\omega}$$

Ранее была сформулирована теорема о полном дифференциале для пространственной кривой. В ее доказательстве не хватало только одного пункта – перехода от пункта 3) к пункту 2). Все остальное доказывается аналогично случаю плоской кривой.

### **Теорема (о полном дифференциале) для пространственной кривой.**

Пусть дуга  $AB$  лежит на кусочно-гладкой поверхности  $S$ , пусть функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные на  $S$ . Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны.

5)  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$  не зависит от формы дуги (от пути интегрирования), а зависит только от начальной и конечной точек дуги.

6) Для любого замкнутого контура  $\gamma \subset S$   $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$

7)  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \forall (x, y, z) \in S$

8)  $Pdx + Qdy + Rdz = dV(x, y, z), \quad P = \frac{\partial V}{\partial x}, Q = \frac{\partial V}{\partial y}, R = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad V(x, y, z)$  - полный дифференциал.

Теперь переход от пункта 3) к пункту 2) легко сделать по формуле Стокса.

Криволинейный интеграл от полного дифференциала можно вычислять по формуле

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1, z_1)dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y, z_1)dy + \int_{z_1}^{z_2} R(x_2, y_2, z)dz, \text{ так как интеграл}$$

не зависит от формы дуги (пути интегрирования).

Криволинейный интеграл от полного дифференциала можно вычислять также по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1), \text{ где } V(x, y, z) - \text{ потенциал векторного}$$

поля ( $\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}V}$ ).

### Потенциальное поле и его свойства.

Векторное поле  $\vec{a}(M)$  называется **потенциальным**, если существует такое скалярное поле  $V(M)$  (**потенциал** векторного поля  $\vec{a}(M)$ ), что  $\vec{a}(M) = \overrightarrow{\text{grad}V}(M)$ .

*Замечание.* Если поле  $\vec{a}(M)$  - потенциально, то  $\vec{a}(M) \cdot \vec{dr} = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dr} = dV$  - полный дифференциал. Тогда  $Pdx + Qdy + Rdz = \vec{a} \cdot \vec{dr} = dV$  - полный дифференциал. Поэтому свойства потенциального поля можно сформулировать и доказать как следствия теоремы о полном дифференциале.

### Свойства потенциального поля.

1. Линейный интеграл потенциального поля  $\int_L \vec{a} \cdot \vec{dr}$  не зависит от формы дуги  $L = \overset{\sim}{AB}$ , а зависит только от начальной и конечной точек дуги.

$$\text{В самом деле, } \int_L \vec{a} \cdot \vec{dr} = \int_L \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dr} = \int_L dV = V(B) - V(A).$$

2. Циркуляция потенциального поля равна нулю

$$\text{Полагая дугу } AB \text{ замкнутой (} A = B \text{), получаем } \int_L \vec{a} \cdot \vec{dr} = V(A) - V(A) = 0$$

3. Потенциальное поле является безвихревым, т.е.  $\overrightarrow{\text{rot}\vec{a}} = 0$

$$\overrightarrow{\text{rot}\vec{a}} = \overrightarrow{\text{rot}(\text{grad}V)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = 0$$

### Оператор Гамильтона

Оператор Гамильтона  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right\}$ .

Применим оператор Гамильтона к скалярному полю  $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad} \varphi}$ .

Оператор Гамильтона представляет собой вектор-оператор. Его можно скалярно или векторно умножить на векторное поле  $\vec{a}(M)$ .

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div} \vec{a} = 0, \quad \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}.$$

Это дифференциальные операции первого порядка над скалярным и векторным полями. От скалярного поля можно взять градиент, от векторного поля можно взять дивергенцию и ротор.

### Дифференциальные операции второго порядка.

В результате дифференциальных операций первого порядка мы получаем скалярные и векторные поля  $\overrightarrow{\text{grad} \varphi}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}$ ,  $\text{div} \vec{a}$ .

К ним вновь можно применить дифференциальные операции первого порядка.

От скалярного поля  $\text{div} \vec{a}$  можно взять градиент, получив векторное поле  $\overrightarrow{\text{grad} \text{div} \vec{a}}$ .

От векторных полей  $\overrightarrow{\text{grad} \varphi}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}$  можно взять ротор и дивергенцию, получив скалярные поля  $\text{div} \overrightarrow{\text{grad} \varphi}$ ,  $\text{div} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}$  и векторные поля  $\overrightarrow{\text{rot} \overrightarrow{\text{grad} \varphi}}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}}$ .

Итак, дифференциальные операции второго порядка позволяют получить скалярные поля  $\text{div} \overrightarrow{\text{grad} \varphi}$ ,  $\text{div} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}$  и векторные поля  $\overrightarrow{\text{grad} \text{div} \vec{a}}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot} \overrightarrow{\text{grad} \varphi}}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}}$ .

Ранее было показано, что *потенциальное поле – безвихревое*, т.е.  $\overrightarrow{\text{rot} \overrightarrow{\text{grad} \varphi}} = 0$ .

Покажем, что *поле ротора – соленоидальное поле*, т.е.  $\text{div} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}} = 0$ .

Доказательство.

$$\overrightarrow{\text{rot} \vec{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0.$$

Три остальных векторных поля связаны друг с другом. Это становится ясным, если рассматривать векторные операции с оператором Гамильтона «набла» аналогично обычным векторным операциям. Однако, эти аналогии не совсем верны, см. подробнее о свойствах оператора «набла» выпуск 7 учебника.

$$\overrightarrow{\text{rot} \overrightarrow{\text{grad} \varphi}} = \nabla \times (\nabla \varphi) = (\nabla \times \nabla) \varphi = 0, \quad \text{div} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{a} = \nabla \times \nabla \cdot \vec{a} = 0$$

Известно соотношение  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ . Переносим это правила на действия с оператором «набла», получим

$$\overrightarrow{\text{rot} \overrightarrow{\text{rot} \vec{a}}} = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\nabla \cdot \nabla) = \overrightarrow{\text{grad} \text{div} \vec{a}} - \nabla^2 \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad} \text{div} \vec{a}} - (\text{div} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{a}.$$



Здесь  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа (скаляр – оператор).

$$\overrightarrow{\text{div grad}} = \text{div} \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2.$$

$(\overrightarrow{\text{div grad}})\vec{a} = \nabla^2 P\vec{i} + \nabla^2 Q\vec{j} + \nabla^2 R\vec{k}$  - произведение скаляр-оператора Лапласа на вектор  $\vec{a}$ .

### Гармоническое поле.

**Скалярное поле**  $\varphi(x, y, z)$  называется гармоническим, если

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ - уравнение Лапласа.}$$

**Векторное поле** называется гармоническим, если оно потенциальное ( $\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ ), а потенциал  $\varphi$  - гармоническое скалярное поле, т.е.  $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ .

**Теорема.** Для того, чтобы векторное поле  $\vec{a}(M)$  было гармоническим, необходимо и достаточно чтобы оно было соленоидальным и потенциальным.

Необходимость. Если векторное поле  $\vec{a}(M)$  - гармоническое, то оно потенциальное, т.е.  $\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ , тогда оно соленоидально, так как  $\text{div}\vec{a} = \text{div}\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \nabla^2 \varphi = 0$ .

Достаточность. Если векторное поле  $\vec{a}(M)$  потенциальное, то  $\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$ . Так как оно еще и соленоидально, то  $0 = \text{div}\vec{a} = \text{div}\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \nabla^2 \varphi$ . Следовательно, поле потенциально и его потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, поэтому векторное поле – гармоническое.

Так как гармоническое поле потенциально и соленоидально, то его свойства – свойства соленоидального поля и свойства потенциального поля.

## Часть 2. Числовые и функциональные ряды

### Лекция 10. Числовые ряды и их свойства.

**Числовой ряд**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – это сумма бесконечного количества чисел, выбранных по определенному алгоритму. Обычно задают формулу общего члена ряда  $a_n$ .

*Примеры*

1.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$  – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = \frac{1}{2}$ . Ее сумма равна  $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ ,
2.  $1 + 1 + 1 + \dots$ . Сумма этого ряда бесконечна.
3.  $1 - 1 + 1 - 1 \dots$ . Сумма этого ряда не существует (ни конечная, ни бесконечная).

При изучении рядов возникает основной вопрос: «Сходится ли ряд». Отвечая на этот вопрос для геометрической прогрессии, мы вычисляем последовательно  $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ ,  $S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ , – суммы  $n$  членов ряда – **частичные суммы ряда**  $S_n$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется **сходящимся**, если существует **конечный предел** **последовательности частичных сумм ряда** – он называется **суммой ряда**  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Ряд называется **расходящимся**, если предел частичных сумм ряда бесконечен или вообще не существует.

**Необходимый признак сходимости ряда.** Если ряд сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Доказательство.*  $a_n = S_n - S_{n-1}$ . Пусть ряд сходится, тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$ .

Необходимый признак позволяет отсеивать часть расходящихся рядов.

**Достаточный признак расходимости.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд расходится.

*Доказательство* (от противного). Пусть ряд сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  Противоречие с  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

*Пример.* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n-1}$  расходится, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2} \neq 0$

*Пример* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  расходится, так как  $a_n \rightarrow e \neq 0$ .

### Критерий Коши сходимости ряда.

(Это – критерий Коши для последовательности частичных сумм ряда).

Для того чтобы ряд **сходился** (последовательность частичных сумм имела конечный предел), *необходимо и достаточно*, чтобы  $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N, \forall p \geq 0 \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ .

### Критерий Коши расходимости ряда. (отрицание критерия Коши)

Для того чтобы ряд **расходился** *необходимо и достаточно*, чтобы  $\exists \varepsilon > 0 \forall N, \exists n > N, \exists p \geq 0 \quad |S_{n+p} - S_n| > \varepsilon$ .

*Пример.* Рассмотрим гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| >$$

$$\left| \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| = \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2}, \text{ если выбрать } p = n. \text{ Удалось для } \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \forall N, n \text{ выбрать } p = n,$$

чтобы  $|S_{n+p} - S_n| > \varepsilon$ . Следовательно, **гармонический ряд расходится**.

### Свойства сходящихся рядов.

1. Члены сходящегося ряда можно умножить на одно и то же число  $k$ . Полученный ряд будет сходиться, а сумма его будет в  $k$  раз больше суммы исходного ряда.

*Доказательство.* Для второго ряда частичная сумма будет равна  $S_{2n} = ka_1 + \dots + ka_n = k(a_1 + \dots + a_n) = kS_{1n}$ . По теореме о предельном переходе в равенстве  $\exists S_2 = kS_1$ .

2. Члены сходящегося ряда можно группировать. Полученный ряд будет сходиться, и сумма его не изменится.

Сгруппируем члены ряда, например, так

$b_1 = a_1 + \dots + a_k, b_2 = a_{k+1} + \dots + a_l, \dots, b_n = a_s + \dots + a_p, \dots$ . Видно, что частичные суммы группированного ряда представляют собой подпоследовательность последовательности частичных сумм исходного ряда. Так как последовательность сходится, то и подпоследовательность сходится к тому же пределу.

3. В сходящемся ряде можно отбросить конечное число первых членов  $a_1 \dots a_k$  ( $a_1 + \dots + a_k = B$ ). Полученный ряд будет сходиться, а его сумма будет меньше суммы исходного ряда на  $B$ .

Запишем частичные суммы второго ряда

$S_{21} = a_{k+1} = S_{1k+1} - B, \dots, S_{2n} = a_{k+1} + \dots + a_{k+n} = S_{1k+n} - B$ . По теореме о предельном переходе в равенстве  $S_2 = S_1 - B$ .

*Замечание.* Ряд, полученный из исходного ряда отбрасыванием первых  $k$  членов,

называется **остатком ряда** и обозначается  $R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$

- Для того чтобы ряд сходиллся необходимо и достаточно, чтобы сходиллся остаток ряда. (Докажите это самостоятельно, используя доказательство свойства 3).  
Поэтому сходимость ряда можно исследовать, «начиная с некоторого  $n$ ».
- Сходящиеся ряды можно складывать (или вычитать), получая сходящийся ряд с суммой, равной сумме (или разности) сумм исходных рядов.

Рассмотрим два сходящихся ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , где

$c_n = a_n \pm b_n$ .  $S_{c_n} = S_{a_n} \pm S_{b_n}$ . Переходя к пределу в равенстве, получим  $S_c = S_a \pm S_b$ .

*Примеры.*

- Ряд  $-5+7-8+100+1+0,5+0,25+0,125+\dots$  сходится. В самом деле, отбросив первых четыре члена ряда (свойства 3,4), получим сходящуюся бесконечно убывающую геометрическую прогрессию
- Ряд  $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\dots$  расходится. Он представляет собой сумму двух рядов: сходящейся геометрической прогрессии (нечетные члены) и гармонического ряда (четные члены). Если бы этот ряд сходиллся, то, вычитая из него почленно сходящийся ряд  $1+0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\dots$ , мы должны были бы по свойству 5 получить сходящийся ряд. А получаем расходящийся гармонический ряд. Следовательно, исходный ряд расходится.
- Ряд  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$  сходится. Рассмотрим сходящийся ряд  $1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \dots = 1$ . Группируем его члены  $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$ , получаем исходный ряд. Следовательно, он сходится (свойство 2), и его сумма равна 1.

### Лекция 11 Знакоположительные ряды.

Числовой ряд называется **знакоположительным**, если все его члены – положительные (неотрицательные) числа.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0$$

Основная и довольно приятная особенность знакоположительных рядов в том, что частичные суммы ряда представляют собой неубывающую последовательность.

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}, \text{ т.к. } a_n \geq 0.$$

Поэтому достаточно проверить, что последовательность частичных сумм ограничена сверху, чтобы по теореме Вейерштрасса утверждать, что последовательность частичных сумм имеет конечный предел, т.е. ряд сходится.

На этом основаны, практически, все признаки сходимости рядов.

Ряд может сравниваться с несобственным интегралом (интегральный признак Коши), с другими рядами (признаки сравнения рядов), в частности, со сходящейся геометрической прогрессией (признак Даламбера, радикальный признак Коши).

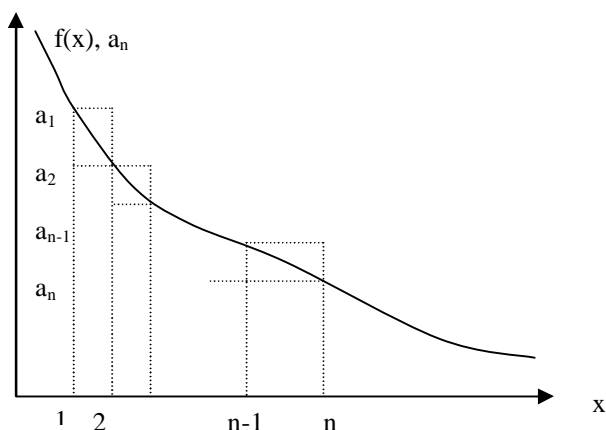
Каждый признак можно сравнить с увеличительным стеклом. У каждого признака есть своя область применения, более широкая или более узкая (как поле зрения линзы) и своя сила. Одни признаки сильнее, позволяют различать слабо сходящиеся или слабо расходящиеся ряды, но имеют узкую область применения (например, интегральный признак Коши). Другие, наоборот, имеют широкую область применения, но довольно слабы, ряды, близкие к границе сходимости, с их помощью не различишь (например, признаки Даламбера и Коши (радикальный)).

Пока в библиотеке рядов, которые мы можем использовать для сравнения, всего два ряда: сходящийся ряд - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, известная еще из школы, и расходящийся гармонический ряд, полученный по критерию Коши.

Заметим, что критерий Коши (как критерий сходимости), вообще, самый сильный инструмент при исследовании сходимости ряда, но его область применимости узка.

Интегральный признак Коши, основанный на сравнении с несобственным интегралом - очень сильный признак. В самом деле, если аппроксимировать непрерывную подинтегральную функцию кусочно-постоянной, то площадь под графиком функции (интеграл) и площадь под графиком кусочно-постоянной функции будут различаться на конечное число.

### Интегральный признак Коши.



Пусть при  $x \geq 1$  определена непрерывная, не возрастающая функция  $f(x)$ , такая, что  $f(n) = a_n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

*Доказательство.*  $\int_1^n f(x) dx$  - это площадь под графиком функции  $f(x)$  при  $1 \leq x \leq n$ .

Так как  $a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_n - a_1$  (сумма площадей прямоугольников) ограничивает площадь под графиком функции снизу, а  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = S_n - a_n$  ограничивает ее сверху,

$$\text{то } S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_n - a_n.$$

. *Достаточность.* Если интеграл сходится, то  $S_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$ , поэтому последовательность  $\{S_n\}$  ограничена сверху. Так как эта последовательность не убывает, то по теореме Вейерштрасса  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ . Поэтому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

*Необходимость.* Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ , а по необходимому признаку сходимости ряда  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Поэтому последовательность  $\left\{ \int_1^n f(x)dx \right\}$  (неубывающая, так как  $f(x) \geq 0$ ) ограничена сверху. Следовательно, по теореме Вейерштрасса  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$ , т.е. несобственный интеграл сходится.

Если ряд расходится, то и интеграл расходится и наоборот. Это легко доказывается от противного.

Поэтому говорят, что несобственный интеграл и ряд *сходятся или расходятся «одновременно»*, т.е. один из них сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится. Это понятие часто употребляют при сравнении рядов.

*Пример.* Применим интегральный признак к *гармоническому ряду*.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty$  - интеграл расходится, поэтому и гармонический ряд расходится.

*Пример.* Рассмотрим «**ряды Дирихле**»  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ . Название взято в кавычки, так неизвестно, рассматривал ли эти ряды Дирихле, но оно устоялось за долгие годы.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} - 1$  ( $p \neq 1$ ). Ясно, что интеграл сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p < 1$ . Случай  $p=1$  рассмотрен выше (расходящийся гармонический ряд). Отсюда следует вывод

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{сходится при } p > 1 \\ \text{расходится при } p \leq 1 \end{cases}.$$

Интересно, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n}$  сходится при  $q > 1$  и расходится при  $q \leq 1$ , интегралы

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ,  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln n}$  расходятся (проверьте по интегральному признаку).

Теперь становится яснее, где пролегает граница между сходящимися и расходящимися рядами. Заодно накоплена библиотека сходящихся и расходящихся рядов, которые можно использовать как эталонные при сравнении рядов. Сравнить ряды можно с помощью признаков сравнения.

## Признаки сравнения рядов.

### Первый признак сравнения рядов.

Пусть выполнено неравенство  $a_n \leq b_n \forall n$ . Тогда из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

*Замечание.* В силу свойства сходящихся рядов, конечное число членов ряда не влияет на сходимость и неравенство  $a_n \leq b_n$  можно проверять «начиная с некоторого  $n$ ». Поэтому эту фразу часто можно встретить в теоремах о рядах. Иногда ее просто опускают, но ее всегда надо иметь в виду.

*Доказательство.* 1) Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится. Тогда выполнено неравенство  $S_{a_n} \leq S_{b_n} < S_b \forall n$ . Поэтому последовательность частичных сумм  $\{S_{a_n}\}$  ограничена сверху числом  $S_b$ . Но эта последовательность не убывает. Следовательно, по теореме Вейерштрасса  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{a_n} = S_a \leq S_b$ . Последнее неравенство справедливо в силу теоремы о предельном переходе в неравенстве.

2) Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то по п.1 доказательства и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Противоречие. Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится.

*Пример.* Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  расходится, так как  $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ , а ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  (гармонический) расходится.

### Второй признак сравнения.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0$ . Тогда ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся или расходятся «одновременно», т.е. один из них сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится.

*Доказательство.* Раскроем определение предела.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N \left| \frac{a_n}{b_n} - C \right| < \varepsilon$ .

$$C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon, \quad b_n(C - \varepsilon) < a_n < b_n(C + \varepsilon).$$

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то по 1 признаку сравнения ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(C - \varepsilon)$  сходится ( $C - \varepsilon > 0$ , так как  $\varepsilon$  мало), ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится (свойство сходящихся рядов).

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(C + \varepsilon)$  сходится (свойство сходящихся рядов), тогда по 1 признаку сравнения ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то по предыдущему ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится (противоречие).

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то по предыдущему ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится (противоречие).

*Пример.* Ряд с  $a_n = \frac{n^2 + 4n - 2}{n^3 + n - 5}$  расходится по второму признаку сравнения (ряд сравнения – гармонический ряд).

Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}(n+1)}{n \arctg n}$  сходится.  $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty)$ ,  $\arctg n$  - ограничена. Ряд сравнения  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - сходящийся ряд Дирихле.

### Признак Даламбера.

#### Конечная форма признака Даламбера.

Пусть  $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

Пусть  $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

*Доказательство.* Пусть  $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ .

Тогда  $a_{n+1} \leq qa_n \leq q^2 a_{n-1} \leq q^3 a_{n-2} \leq \dots \leq q^n a_1$ .

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \leq \frac{a_1}{1-q}$ , и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Можно было, не оценивая частичную сумму ряда, заключить, что ряд сходится по первому признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пусть  $\forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$ , Тогда  $a_2 \geq qa_1 > a_1, a_3 \geq qa_2 \geq q^2 a_1 > a_1 \dots a_n \geq q^{n-1} a_1 > a_1$ .

Поэтому  $a_n$  не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

#### Предельная форма признака Даламбера.



Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1$ , то признак не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

*Доказательство.* Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ , что  $\forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$ .

При малом  $\varepsilon$   $0 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1$ . По конечной форме признака Даламбера ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ , что  $\forall n > N \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$ . При малом  $\varepsilon$   $1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , то есть  $\forall n > N$   $a_{n+1} > a_n$ . Поэтому  $a_n$  не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

*Замечание.* Признак Даламбера удобно применять, когда общий член ряда содержит произведение некоторых чисел или факториал.

Правда, если общий член ряда содержит факториал, то его можно заменить по формуле Стирлинга  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$  при  $n \rightarrow \infty$  и применять второй признак сравнения.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ . Ряд сходится по

признаку Даламбера.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ . Рассмотрим  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}e^n n!} = \frac{e(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$ , так

как последовательность  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , монотонно возрастая, стремится к  $e$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$\forall n > N$   $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ . Следовательно,  $\forall n > N$   $a_{n+1} > a_n$ . Поэтому  $a_n$  не стремится к нулю

при  $n \rightarrow \infty$ , необходимый признак сходимости ряда не выполнен, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1$ . Поэтому признак Даламбера в

предельной форме не дает ответ о сходимости или расходимости ряда, хотя признак в конечной форме позволяет установить расходимость ряда.

### Радикальный признак Коши.

#### Конечная форма радикального признака Коши.

Пусть  $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

Пусть  $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \geq q > 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

*Доказательство.* Пусть  $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ . Тогда  $a_n \leq q^n$ ,  $q < 1$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится по первому признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пусть  $\forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \geq q > 1$ . Тогда  $a_n \geq q^n > 1$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, так как необходимый признак сходимости ряда не выполнен.

#### Предельная форма радикального признака Коши.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$ , тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

*Доказательство.* Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N \left| \sqrt[n]{a_n} - q \right| < \varepsilon$ .

$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$  при малом  $\varepsilon$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится по конечной форме радикального признака Коши.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall n > N \left| \sqrt[n]{a_n} - q \right| < \varepsilon$ .  $\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$  при малом  $\varepsilon$ . Тогда  $a_n \geq q^n > 1$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, так как необходимый признак сходимости ряда не выполнен.

*Пример.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^{n-1}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt[n]{3n}}{3} = \frac{2}{3} < 1$ , ряд сходится по радикальному признаку Коши в предельной форме.

*Замечание.* У каждого признака сходимости есть своя «зона нечувствительности». Ни признак Даламбера, ни радикальный признак Коши не позволяют установить расходимость

гармонического ряда. Проверьте это. Гармонический ряд расходится, но расходится так слабо, что попадает в «зону нечувствительности» указанных признаков. Интегральный признак Коши имеет меньшую «зону нечувствительности» и позволяет установить расходимость гармонического ряда.

**Теорема Дирихле о возможности перестановки местами членов ряда в сходящихся знакоположительных рядах.**

Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сходящийся знакоположительный ряд. Тогда его члены можно переставлять, менять местами, полученный ряд будет сходиться и иметь ту же сумму.

*Доказательство.* Проведем доказательство по индукции.

Пусть меняются местами два члена ряда  $a_k$  и  $a_m$ ,  $m > k$ . Тогда в исходном и полученном перестановкой членов ряде частичные суммы, начиная с  $S_m$  будут совпадать. Следовательно, ряд, полученный перестановкой двух членов ряда, будет сходиться и иметь ту же сумму.

Пусть при перестановке местами  $r$  членов ряда ряд сходится и имеет ту же сумму.

Пусть переставляются  $r + 1$  членов ряда. Эта перестановка сводится к перестановке  $r$  членов ряда, а затем к перестановке еще какого-либо члена с каким-либо другим (перестановке двух членов ряда).

По индуктивному предположению при перестановке местами  $r$  членов ряда ряд сходится и имеет ту же сумму. Ряд, полученный перестановкой двух членов ряда, будет сходиться и иметь ту же сумму. Следовательно, и при перестановке  $r + 1$  членов ряда ряд будет сходиться и иметь ту же сумму.

## Лекция 12. Знакопеременные ряды.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется **знакопеременным**, если среди членов ряда содержится бесконечное количество отрицательных членов и бесконечное количество положительных членов.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется **абсолютно сходящимся**, если ряд из модулей членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится.

**Теорема.** Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |a_n|)$  тоже сходится. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$  - знакоположительный, так как  $a_n > -|a_n|$  и сходится по первому признаку сравнения рядов по сравнению со знакоположительным рядом

$\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |a_n|)$ , так как  $a_n \leq |a_n|$ . Вычитая из сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$  сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , получаем *сходящийся ряд* (свойство сходящихся рядов)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

### Теорема о перестановке членов в абсолютно сходящихся рядах.

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится, тогда его члены можно переставлять, получая абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.

*Доказательство.* Обозначим  $s$  - сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $S$  - сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ . Он знакоположительный, так как  $a_n > -|a_n|$ . Он сходится по первому признаку сравнения рядов по сравнению со знакоположительным рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |a_n|)$ , так как  $a_n \leq |a_n|$ . Его сумма равна  $s + S$ .

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  получен перестановкой членов из  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Тогда знакоположительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  получен перестановкой членов из  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . По теореме Дирихле он сходится и имеет ту же сумму  $S$ .

Знакоположительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + |b_n|$  получен перестановкой членов из ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ . Следовательно, по теореме Дирихле, он сходится и имеет ту же сумму  $S + s$ .

Вычитая из сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + |b_n|$  сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ , мы получим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . По свойствам сходящихся рядов он сходится и имеет сумму, равную  $(S + s) - S = s$ .

Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , полученный при перестановке членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , сходится и имеет ту же сумму, что и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется **условно сходящимся**, если ряд из модулей членов ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится, а сам ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

### Теоремы о структуре знакопеременных рядов.

Обозначим  $p_n > 0$  - положительные члены,  $q_n$  - отрицательные члены знакопеременного ряда.  $A$  - ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $A_m$  - ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ,  $P$  - ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ,  $P_0$  - ряд  $A$ , в котором все отрицательные члены заменены нулями на тех же местах.  $Q$  - ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ ,  $Q_0$  - ряд  $A$ , в котором все положительные члены заменены нулями на тех же местах.

*Пример*

$$\begin{array}{l}
 A \quad p_1 + p_2 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + p_3 + q_5 + q_6 + p_4 + p_5 + q_7 + \dots \\
 A_m \quad |p_1| + |p_2| + |q_1| + |q_2| + |q_3| + |q_4| + |p_3| + |q_5| + |q_6| + |p_4| + |p_5| + |q_7| + \dots \\
 P_0 \quad p_1 + p_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + p_3 + 0 + 0 + p_4 + p_5 + 0 + \dots \\
 P \quad p_1 + p_2 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad p_3 + \quad + \quad + \quad p_4 + p_5 + \quad + \dots \\
 Q_0 \quad 0 + 0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + 0 + q_5 + q_6 + 0 + 0 + q_7 + \dots \\
 Q \quad + \quad + \quad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \quad + \quad q_5 + q_6 + \quad + \quad + \quad q_7 + \dots
 \end{array}$$

**Теорема** Ряды  $P$ ,  $P_0$ , ряды  $Q$ ,  $Q_0$  сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* Так как ряд знакопеременный, то два последовательных положительных члена отделяет друг от друга конечное число отрицательных членов. То же верно и для последовательных отрицательных членов. Пусть первая серия нулей в  $P_0$ :  $a_{r+1} \dots a_{r+k}$ . Тогда  $S_{Pr} = S_{P_0r} = S_{P_0r+1} = \dots = S_{P_0r+k}$ , т.е.  $k$  элементов в последовательности частичных сумм повторяются. Исключим их из последовательности и перенумеруем члены (это соответствует исключению серии нулей). Исключение последовательных одинаковых элементов не влияет на сходимость и предел последовательности. Далее доказательство можно провести по индукции, так как операция исключения нулей аналогична. Поэтому ряды  $P_0$  и  $P$  сходятся или расходятся одновременно. Аналогичное верно и для  $Q_0$  и  $Q$ .

**Теорема.** Если  $P$  сходится,  $Q$  - сходится, то  $A_m$  сходится, т.е. ряд  $A$  сходится абсолютно.

*Доказательство.* Так как  $P$  сходится, то  $P_0$  сходится, так как  $Q$  - сходится, то  $Q_0$  - сходится. Складывая сходящиеся ряды  $P_0$  и  $(-Q_0)$  почленно (учитывая, что  $|p_n| = p_n, |q_n| = -q_n$ ), получим сходящийся ряд. Это - ряд  $A_m$ .

**Теорема.** Если  $P$  сходится и  $Q$  расходится или  $P$  расходится и  $Q$  сходится, то  $A$  расходится.

*Доказательство.* Рассмотрим один из вариантов. Пусть  $P$  сходится и  $Q$  расходится.

Тогда  $P_0$  сходится. Будем доказывать от противного. Пусть  $A$  сходится, тогда, вычитая из него сходящийся ряд  $P_0$ , получим сходящийся ряд  $Q_0$ . Тогда по доказанной выше теореме ряд  $Q$  сходится. Противоречие.

Второй вариант  $P$  расходится и  $Q$  сходится рассматривается аналогично.

**Теорема.** Пусть ряд  $A$  условно сходится, тогда ряды  $P$ ,  $Q$  расходятся.

*Доказательство.* Если  $P$ ,  $Q$  оба сходятся, то по доказанной выше теореме  $A_m$  сходится, т.е. ряд  $A$  сходится абсолютно. Противоречие.

Если  $P$  сходится и  $Q$  расходится или  $P$  расходится и  $Q$  сходится, то  $A$  расходится. (по доказанной выше теореме). Противоречие.

Следовательно, оба ряда  $P$ ,  $Q$  расходятся.

Итак, получена следующая схема.

$$\{P \text{ cx}, Q \text{ расх} \text{ или } P \text{ расх}, Q \text{ cx} \Rightarrow A \text{ расх}, \begin{cases} P \text{ cx} \\ Q \text{ cx} \end{cases} \Rightarrow A \text{ абсол. cx}$$

$$A \text{ абсол. cx} \Rightarrow \begin{cases} P \text{ cx} \\ Q \text{ cx} \end{cases} \quad A - \text{ усл. cx} \Rightarrow \begin{cases} P \text{ расх} \\ Q \text{ расх} \end{cases}.$$

Эта схема отражает суть теорем о структуре знакопеременных рядов.

$$\text{Пример. } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} - \frac{1}{81} + \dots$$

P:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  - сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Q:  $-\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} - \dots$  сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, исходный ряд A абсолютно сходится.

$$\text{Пример. } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \frac{1}{9} + \dots$$

P:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  - сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Q:  $-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \dots$  расходящийся ряд (по второму признаку сравнения с гармоническим рядом). Следовательно, исходный ряд A расходится.

### Теорема Римана.

Пусть  $S$  – произвольное число (конечное или бесконечное). Тогда можно так переставить местами члены условно сходящегося знакопеременного ряда, что его сумма будет равна  $S$ .

*Доказательство.* Так как ряд  $A$  условно сходится, то ряды  $P$ ,  $Q$  расходятся (теоремы о структуре знакопеременного ряда). Пусть для определенности  $S > 0$ . Переставляем в начало ряда столько положительных членов, чтобы их сумма стала больше  $S$ , Теперь переставляем столько отрицательных членов, чтобы частичная сумма ряда стала бы меньше  $S$ . Повторяем этот процесс. Процесс осуществим для любого  $S$ , так как ряды  $P$ ,  $Q$  расходятся (т.е. повторением членов можно набрать любую их сумму). С другой стороны, частичная сумма сконструированного ряда сходится именно к  $S$ . В сконструированном ряде  $|S_n - S| < b_n$ , где  $b_n$  - тот член ряда, добавление которого меняет знак  $S_n - S$ .  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  так как знакопеременный ряд условно сходится.

Сам ход доказательства напоминает добавление положительных членов – гирь на одну чашку весов, пока весы не покажут вес, больший  $S$ . Последний член – гиря  $b_n$ . Затем добавление на другую чашку весов столько отрицательных – членов (вернее гирь, весом, равным модулям этих членов), чтобы весы показали вес, меньший  $S$ . Процесс повторяется. Вес гирь, вызывающих переход указателя весов через  $S$ , убывает до нуля, так как для условно сходящегося ряда выполняется необходимый признак сходимости. Поэтому  $\{S_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$ .

### Знакопеременные ряды.

Знакопеременный ряд называется знакопеременным, если знаки членов ряда чередуются, т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  имеет вид  $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots$ . Предполагаем, что ряд начинается с положительного члена,  $v_k > 0, \forall k \geq 1$ .

К знакопеременным рядам можно применить все теоремы, доказанные выше для знакопеременных рядов. Но есть специальный, очень удобный *достаточный* признак сходимости знакопеременных рядов – признак Лейбница (он не является необходимым признаком).

### Признак Лейбница.

Пусть

1. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  имеет вид  $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots$  (знакопеременный,  $v_k > 0, \forall k \geq 1$ )
2. последовательность  $\{v_n\}$  монотонно убывает
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$

Тогда 1) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится

$$2) |S| \leq v_1$$

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами

$S_{2n} = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots > 0$ , т.к.  $v_1 - v_2 > 0, v_3 - v_4 > 0 \dots$  (последовательность  $\{v_n\}$  монотонно убывает по условию теоремы).

$$S_{2n} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \dots < v_1, \text{ т.к. } v_2 - v_3 > 0, v_4 - v_5 > 0 \dots$$

Т.е. последовательность  $\{S_{2n}\}$  ограничена сверху  $v_1$ .

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = (v_1 - v_2 + \dots + v_{2n-1} - v_{2n} + v_{2n+1} - v_{2n+2}) - (v_1 - \dots - v_{2n}) = v_{2n+1} - v_{2n+2} > 0$$

Т.е. последовательность  $\{S_{2n}\}$  монотонно возрастает.

По теореме Вейерштрасса существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ .

Рассмотрим теперь последовательность частичных сумм с нечетными номерами

$$S_{2n+1} = S_{2n} + v_{2n+1}.$$

По условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n+1} = 0$ .

По доказанному выше  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ . Следовательно, предел правой части равенства существует и равен  $S$ . Поэтому предел левой части равенства тоже существует и равен  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$ .

Раскроем определение предела  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N \quad |S_n - S| < \varepsilon$  как для четных  $n$ , так и для нечетных  $n$ . Следовательно, это справедливо для любых  $n > N$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Из доказанного выше неравенства  $0 < S_{2n} < v_1$ . Переходя к пределу, получим  $0 \leq S \leq v_1$ , т.е.  $|S| \leq v_1$ .

**Следствие.**  $|R_n| \leq a_{n+1}$ . Остаток ряда оценивается модулем первого отброшенного члена ряда.

*Доказательство.* Так как остаток знакопеременного ряда тоже знакопеременный ряд, то его сумма по признаку Лейбница оценивается модулем его первого члена.

То есть  $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|$ . А первый член остатка ряда и есть первый отброшенный член.

*Пример.* Ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ,  $v_n = \frac{1}{n}$ . Ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из модулей – расходящийся гармонический ряд. Следовательно, ряд сходится условно.

$$|R_n| < \frac{1}{n+1}$$

## Функциональные ряды

### Лекция 13. Равномерно сходящиеся ряды.

*Функциональный ряд* – это ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$ , члены которого – функции  $u_n(x)$ , определенные в некоторой области  $V$ .

Определим частичную сумму ряда – тоже функцию  $S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$ .

Зафиксировав некоторую точку  $x$ , мы имеем дело с обычным числовым рядом.

Функциональный ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$  называется *сходящимся в точке  $x$* , если  $\{S_n(x)\}$  сходится к  $S(x)$  или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x), \text{ что } \forall n > N |S_n(x) - S(x)| = |u_{n+1}(x) + \dots| < \varepsilon.$$

Это – обычная или *поточечная* сходимость ряда, так как номер  $N$  зависит не только от  $\varepsilon$ , как в числовых рядах, но и от точки  $x$ . То есть в каждой точке  $x$  ряд сходится со своей скоростью.

*Критерий Коши поточечной сходимости ряда.* Это – критерий Коши для последовательности частичных сумм ряда.

Для того чтобы функциональный ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$  сходилась в точке  $x$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x), \forall n > N, \forall p \geq 0 |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ .

Все точки, в которых ряд сходится, составляют *область сходимости* ряда.

Примеры. 1) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$  сходится только в точке  $x = 0$ , во всех остальных точках ряд расходится.  $V : \{0\}$ .

2) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  сходится во всех точках оси,  $V = R$ .

3) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$  сходится в области  $V = (-1, 1]$ .



4) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \cos x}$  расходится во всех точках оси  $V = \mathbb{R}$ .

Функциональный ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  называется **равномерно сходящимся в области V**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \text{ что } \forall n > N, \forall x \in V |S_n(x) - S(x)| = |u_{n+1}(x) + \dots| < \varepsilon.$$

Здесь номер N зависит только от  $\varepsilon$ , но не от точки x, поэтому номер N выбирается сразу для всей области V. Ряд сходится с одной и той же скоростью для всех точек области V. Такая сходимость напоминает сходимость числовых рядов. Действительно, равномерно сходящиеся ряды обладают очень полезными свойствами, которые мы обсудим ниже.

*Критерий Коши равномерной сходимости ряда.*

Для того чтобы функциональный ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  *равномерно* сходилась в области V,

необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall x \in V, \forall n > N, \forall p \geq 0 |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

**Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.**

Пусть члены функционального ряда  $u_n(x)$  можно мажорировать (ограничить по модулю) в области V членами сходящегося числового знакоположительного ряда,

$$|u_n(x)| < c_n, \forall x \in V, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C.$$

Тогда функциональный ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в области V.

*Доказательство.* Так как числовой ряд сходится, то для него выполнен критерий Коши  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N, \forall p \geq 0 |c_{n+1} + \dots + c_{n+p}| = c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon$  (ряд знакоположителен,  $c_k > 0$ ).

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall x \in V, \forall n > N, \forall p \geq 0 |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| < c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon.$$

Следовательно, выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда, и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x) \text{ сходится в области V равномерно.}$$

*Пример.* Ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  сходится равномерно в  $\mathbb{R}$ , так как  $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  - сходящийся числовой ряд.

**Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.**

**Теорема о непрерывности суммы ряда.**

Пусть члены  $u_n(x)$  функционального ряда  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  - непрерывные функции в точке  $x_0$  - внутренней точке области V. Пусть ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно в области V. Тогда сумма функционального ряда - непрерывная функция в точке  $x_0 \in V$ .

*Доказательство.* Так как ряд сходится равномерно в  $V$ , то

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \forall x \in V |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ в частности } |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как  $u_n(x)$  - непрерывные функции в точке  $x_0$ , то и  $S_n(x)$  непрерывна в  $x_0$  как сумма конечного числа непрерывных функций.

Зафиксируем  $n > N$ . По непрерывности  $S_n(x)$

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{Оценим } |S(x) - S(x_0)| = |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)| \leq$$

$$|S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$ , то есть сумма функционального ряда – непрерывная функция в точке  $x_0 \in V$ .

**Теорема о почленном переходе к пределу.**

Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = c_n$ , ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится к  $S(x)$  в  $V$ , тогда

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x)$  (ряд из  $c_n$  сходится к  $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x)$ ).

(без доказательства).

*Заметим,* что суть теоремы содержится в формуле.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \right), \text{ что и оправдывает название теоремы.}$$

**Теорема о почленном интегрировании.**

Пусть  $u_n(x)$  непрерывны в  $V$ , пусть ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в  $V$ . Тогда ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$  сходится к  $\int_a^b S(x) dx$ , где  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , ( $\forall a, b \in V, a \leq b$ ), то есть функциональный ряд можно почленно интегрировать.

*Заметим,* что суть теоремы содержится в формуле  $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$ .

*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в  $V$ , то его сумма  $S(x)$  непрерывна (теорема о непрерывности суммы ряда) и  $\exists \tilde{S} = \int_a^b S(x) dx$

Так как  $u_n(x)$  непрерывны, то  $\exists \int_a^b u_n(x) dx = \tilde{u}_n$ . Составим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$ , покажем, что он сходится к  $\int_a^b S(x) dx$ . Обозначим частичную сумму  $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b S_n(x) dx$ .

Так как ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в  $V$ , то  $\forall n > N |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in V$ .

Оценим

$$|\tilde{S} - \tilde{S}_n| = \left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x)) dx \right| \leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a).$$

### Теорема о почленном дифференцировании.

Пусть  $u_n(x), u_n'(x)$  непрерывны в  $V$ . Пусть ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится в  $V$ , а ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n'(x)$  равномерно сходится в  $V$ . Тогда ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$  можно почленно дифференцировать, причем  $(\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{m=1}^{\infty} u_n'(x)$ .

*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} u_n'(x)$  сходится равномерно, то его сумма  $\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$  - непрерывная функция (теорема о непрерывности суммы ряда). Ее можно интегрировать, применяя теорему о почленном интегрировании.

$$\int_a^x \tilde{S}(x) dx = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)) = S(x) - S(a)$$

Дифференцируя, получим  $\tilde{S}(x) = S'$ , то есть  $\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)'$ .

## Лекция 14. Степенные ряды.

**Степенным рядом** называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Степенной ряд заведомо сходится при  $x = x_0$ ,  $x_0$  - центр сходимости ряда.

### Теорема Абеля.

1) Пусть степенной ряд сходится в точке  $x_1 \neq x_0$ . Тогда он абсолютно сходится в интервале

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|, \text{ симметричном относительно } x_0.$$

2) Пусть степенной ряд расходится в точке  $x_1 \neq x_0$ . Тогда он расходится в области  $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ .

*Доказательство.*

1) Пусть степенной ряд сходится в точке  $x_1 \neq x_0$ , тогда числовой ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$  сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости ряда  $a_n (x_1 - x_0)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0, \forall n > N |a_n (x_1 - x_0)^n| < \varepsilon$ .

Рассмотрим произвольное, но фиксированное  $x$ :  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ .

Оценим  $|a_n (x - x_0)^n| = \left| a_n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} (x_1 - x_0)^n \right| \leq |a_n (x_1 - x_0)^n| \frac{|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} \leq \varepsilon q^n(x)$ ,

где  $q(x) = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} < 1$  в области  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|, \forall n > N$ .

По первому признаку сравнения числовых знакоположительных рядов ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - x_0|^n$  сходится в указанной области (сравнение с бесконечно убывающей геометрической прогрессией  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon q^n, 0 < q < 1$ ). Следовательно, в области  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$  степенной ряд абсолютно сходится.

2) Пусть степенной ряд расходится в точке  $x_1 \neq x_0$ . Рассмотрим  $\forall x: |x - x_0| > |x_1 - x_0|$ . Если бы ряд сходился в точке  $x$ , то он по п. 1 доказательства сходился бы в точке  $x_1$ . Противоречие.

*Замечание.* Для каждой точки  $x$  константа  $q(x)$  своя. Может не найтись константы, меньшей единицы и ограничивающей сверху константы  $q(x)$  для всех точек области  $V$ .

Поэтому абсолютная сходимость есть, но *равномерной сходимости степенного ряда в области  $V$  не гарантируется.*

*Если такая константа найдется, то гарантируется равномерная сходимость ряда.*

### **Радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда.**

Рассмотрим *монотонно убывающую* последовательность  $\{|x_k - x_0|\}$ , такую, что в точке  $x_k$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_k - x_0)^n$  *расходится*. Если выбрать  $x_k = x_0$ , то степенной ряд будет сходиться (ряд из нулей), поэтому рассматриваемая последовательность ограничена снизу нулем. По теореме Вейерштрасса монотонно убывающая, ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел. То есть  $\exists R = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_0|$ .

Такое число  $R$  называется **радиусом сходимости степенного ряда**. Следовательно, **степенной ряд (по теореме Абеля) абсолютно сходится в интервале  $|x - x_0| < R$  сходимости степенного ряда.**

### Определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.

Зафиксируем некоторое значение  $x$  и запишем ряд из модулей членов степенного ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - x_0|^n$ . Это – знакоположительный числовой ряд. Применим к нему признак

Даламбера или радикальный признак Коши.

Применяя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x - x_0|^{n+1}}{|a_n| |x - x_0|^n} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1. \text{ Отсюда } |x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

$$\text{Поэтому } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Применяя радикальный признак Коши, имеем

$$|x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \quad |x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Так определяется радиус сходимости степенного ряда.

Затем исследуется сходимость ряда на границе интервала сходимости, в точках  $x = x_0 - R$ ,  $x = x_0 + R$ . Эти точки подставляются в исходный ряд, ряд становится обычным числовым рядом и исследуется стандартными методами для числовых рядов.

$$\text{Пример. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n 5^n}.$$

Составим ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n| |(x-3)^n|}{n 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-3|^n}{n 5^n}$ , применим радикальный

признак Коши  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-3|}{\sqrt[n]{n}} < 1$ ,  $|x-3| < 5$ .

Радиус сходимости  $R=5$ , интервал сходимости  $(-2, 8)$ . Исследуем сходимость ряда на границе, подставляя точки  $x = -2$ , в исходный ряд..

В точке  $x = -2$  имеем ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (-5)^m}{m 5^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - гармонический ряд, он расходится.

В точке  $x = 8$  имеем ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (5)^m}{m 5^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  - сходящийся (по признаку Лейбница)

знакопередающийся ряд.

Область сходимости исходного ряда  $(-2, 8]$ .

**Теорема. Степенной ряд равномерно сходится внутри интервала сходимости.**

*Доказательство.* Пусть  $|x - x_0| < R_1 < R$ . Выберем  $R_2 : R_1 < R_2 < R$ , например

$R_2 = \frac{1}{2}(R_1 + R)$ . На интервале  $|x - x_0| < |x_1 - x_0| = R_2$  и в точке  $x_1$  степенной ряд сходится

абсолютно, так как этот интервал лежит внутри интервала сходимости. Тогда (точно так же, как в доказательстве теоремы Абеля оценим

$$\left| a_n (x - x_0)^n \right| = \left| a_n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} (x_1 - x_0)^n \right| \leq \left| a_n (x_1 - x_0)^n \right| \frac{|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} \leq \varepsilon q^n,$$

где  $q = \frac{R_1}{R_2} < 1$  в области  $|x - x_0| < R_1 < R_2 = |x_1 - x_0| \quad \forall n > N \left( \frac{R_1}{R_2} \right)$  не зависит от  $x$ ).

Тогда в области  $|x - x_0| < R_1$  степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса (члены ряда мажорируются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

**Следствие.** Внутри интервала сходимости справедливы теоремы о непрерывности суммы ряда, о почленном интегрировании и дифференцировании ряда.

**Теорема.** При почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется.

*Доказательство.* Рассмотрим ряд из модулей членов степенного ряда (это – знакоположительный числовой ряд в конкретной точке) и определим радиус сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x - x_0|^{n+1}}{|a_n| |x - x_0|^n} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Продифференцируем почленно степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n$ , перейдем к ряду из модулей и найдем радиус сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) |a_{n+1}| |x - x_0|^{n+1}}{n |a_n| |x - x_0|^n} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Таким образом, при почленном дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется. Он не меняется и при почленном интегрировании, иначе он изменился бы при почленном дифференцировании.

## Лекция 15. Ряд Тейлора.

### Ряд Тейлора.

**Рядом Тейлора** называется степенной ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  (предполагается, что функция  $f(x)$  является бесконечно дифференцируемой).

**Рядом Маклорена** называется ряд Тейлора при  $x_0 = 0$ , то есть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

**Теорема.** Степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы.

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  и степенной ряд сходится в интервале  $|x - x_0| < R$ . Подставим в разложение  $x = x_0$ , получим  $f(x_0) = a_0$ .

Так как степенной ряд сходится равномерно внутри интервала сходимости, мы можем его дифференцировать почленно. Полученный ряд будет сходиться в том же интервале, так как радиус сходимости при дифференцировании не меняется. Его вновь можно дифференцировать почленно и т.д. Вычислим коэффициенты в степенных рядах, полученных почленным дифференцированием.  $f'(x_0) = a_1$ ,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x - x_0)^{n-2}, \quad f''(x_0) = 2! a_2, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n (x - x_0)^{n-3}, \quad f'''(x_0) = 3! a_3, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},$$

Продолжая этот процесс, получим  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ . Это – коэффициенты ряда Тейлора.

Поэтому степенной ряд есть ряд Тейлора.

**Следствие.** Разложение функции в степенной ряд единственно.

*Доказательство.* По предыдущей теореме коэффициенты разложения функции в степенной ряд определяются однозначно, поэтому разложение функции в степенной ряд единственно.

### Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.

Запишем разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций, вычисляя коэффициенты разложения по формуле  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ , где  $x_0 = 0$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad (-1 < x \leq 1) \quad (\text{интегрируя предыдущую}$$

формулу)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$|x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Пусть записано разложение функции в степенной ряд. Возникает вопрос, всегда ли это разложение (степенной ряд) сходится именно к этой функции, а не к какой-либо другой.

**Теорема.** Для того чтобы ряд Тейлора сходил к той функции, по которой он построен, *необходимо и достаточно*, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Запишем формулу Тейлора, известную из 1 семестра

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n$$

Необходимость. Обозначим  $S_n$  – частичную сумму ряда Тейлора.

$$S_n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если ряд Тейлора сходится к  $f(x)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_n) = 0$ . Но по формуле Тейлора  $f(x) - S_n = R_n$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ .

Достаточность. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_n) = 0$ , а  $S_n$  – частичная сумма ряда Тейлора. Поэтому ряд Тейлора сходится именно к функции  $f(x)$ .

**Теорема.** Пусть все производные функции  $f(x)$  ограничены в совокупности одной константой. ( $|f^{(n)}(x)| < L, \forall n$ ) Тогда ряд Тейлора сходится к функции  $f(x)$ .

*Доказательство.* Оценим остаточный член формулы Тейлора

$$\frac{|f^{(n)}(\theta)|}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} < L \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ так как показательная функция растет}$$

медленнее, чем  $n!$ . Поэтому (по предыдущей теореме) ряд Тейлора сходится к функции  $f(x)$ .

В качестве примера применения теоремы рассмотрим разложение в ряд Маклорена функций  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Эти ряды сходятся к функциям, так как их производные ограничены в совокупности единицей на всей оси.

В разложении функции  $e^x$  на отрезке  $[a, b]$  все производные функции ограничены константой  $e^b$ , поэтому ряд для функции  $e^x$  сходится к ней на любом конечном отрезке.

Ряды для функций  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  можно получить линейной комбинацией экспонент, следовательно, ряды для этих функций сходятся к ним на всей оси.

Рассмотрим разложение в ряд функции  $(1+x)^\alpha$ . Предположим, что ряд сходится к функции  $S(x)$ . Можно, дифференцируя ряд почленно, установить справедливость соотношения  $(1+x)S'(x) = \alpha S(x)$  (выведите его в качестве упражнения). Решая это дифференциальное уравнение, получим  $S(x) = (1+x)^\alpha$ .

### Применение степенных рядов.

#### 1. Вычисление значений функций

*Пример.* Вычислить  $\operatorname{arctg} 0.3$  с точностью  $\varepsilon = 0.01$ .



$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \operatorname{arctg} 0.3 = 0.3 - \frac{(0.3)^3}{3} + \frac{(0.3)^5}{5} + \dots$$

По следствию из признака Лейбница остаток числового знакочередующегося ряда оценивается модулем первого отброшенного члена.

$$|R_n| \leq \frac{(0.3)^{n+1}}{n+1} < 0,01. \text{ Из этого неравенства найдем } n, n=2. \operatorname{arctg} 0.3 \approx 0,3.$$

Если разложение – знакостоянный ряд, то надо подобрать какой-либо мажорантный ряд с известной суммой, например, оценить сверху члены ряда членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии и оценку суммы ряда проводить по сумме прогрессии.

## 2. Вычисление интегралов.

*Пример.* Вычислить  $\int_{0.1}^{0.3} \frac{1}{1+x} dx$  с точностью  $\varepsilon = 0,01$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots$$

$$\int_{0.1}^{0.3} \frac{1}{1+x} dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \Big|_{0.1}^{0.3} = (0.3 - (0.3)^2 + (0.3)^3 + \dots) - (0.1 - (0.1)^2 + (0.1)^3 + \dots)$$

$$(|R_{1n}| \leq (0.3)^{n+1}), \quad |R_{2n}| \leq (0.1)^{n+1}, \quad (0.3)^{n+1} + (0.1)^{n+1} < 0.01$$

$$n = 3, \quad (0.3)^4 + (0.1)^4 = 0.0082 < 0.01$$

$$\int_{0.1}^{0.3} \frac{1}{1+x} dx = (0.3 - (0.3)^2 + (0.3)^3 + \dots) - (0.1 - (0.1)^2 + (0.1)^3 + \dots) \approx 0,146$$

## 3. Решение дифференциальных уравнений.

*Пример.*  $y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1$

*1 способ.* Представим  $y(x)$  в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами до  $x^n$  ( $n$  – заранее определено). Это разложение подставляется в левую и правую часть, и приравниваются коэффициенты при равных степенях  $x$ . Решается система алгебраических уравнений и определяются коэффициенты.

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5.$$

Заметим, что при дифференцировании степень понижается на единицу, поэтому в разложении нужно запастись членов на  $k$  больше  $n$ , где  $k$  – порядок дифференциального уравнения.

Разложение проводится по степеням  $(x - x_0)$ , если начальные условия заданы в точке  $x_0$ .

В данном уравнении производится разложение в ряд Маклорена, так как начальное условие задано в нуле.

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4.$$

Подставляем разложения в правую и левую части уравнения  $y' = y^2 - x$ .

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) - x =$$

$$a_0^2 + a_1^2x^2 + a_2^2x^4 + 2a_0a_1x + 2a_0a_2x^2 + 2a_0a_3x^3 + 2a_0a_4x^4 + 2a_1a_2x^3 + 2a_1a_3x^4 - x.$$

Удерживаем в разложении члены четвертых степеней, в коэффициентах при  $x^5$  будут

$$1 \quad a_1 = a_0^2 = 1$$

$$x \quad 2a_2 = 2a_0a_1 - 1$$

$$x^2 \quad 3a_3 = a_1^2 + 2a_0a_2$$

$$x^3 \quad 4a_4 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2$$

$$x^4 \quad 5a_5 = a_2^2 + 2a_0a_4 + 2a_1a_3$$

$$\text{Отсюда } a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{7}{12}$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4$$

2 способ. Представим  $y(x)$  в виде ряда Тейлора.

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(x) = y^2(x) - x, \quad y'(0) = y^2(0) - 0 = 1$$

$$y''(x) = 2yy' - 1, \quad y''(0) = 2 - 1 = 1$$

$$y'''(x) = 2(y')^2 + 2yy'', \quad y'''(0) = 4$$

$$y^{IV}(x) = 4y'y'' + 2y'y''' + 2yy''', \quad y^{IV}(0) = 4 + 2 + 8 = 14$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4.$$

## Содержание

### Часть 1 Кратные, криволинейные интегралы, теория поля

<b>Лекция 1</b>	Двойной интеграл..	2
<b>Лекция 2.</b>	Приложения двойного интеграла	6
<b>Лекция 3.</b>	Тройной интеграл	10
<b>Лекция 4.</b>	Приложения тройного интеграла	13
<b>Лекция 5.</b>	Криволинейные интегралы 1 и 2 рода, их свойства	15
<b>Лекция 6.</b>	Формула Грина	20
<b>Лекция 7</b>	Поверхностный интеграл.	26
<b>Лекция 8</b>	Приложения определенного интеграла.	30

<b>Лекция 9</b>	Формула Стокса	35
-----------------	----------------	----

**Часть 2 Числовые и функциональные ряды.**

<b>Лекция 10.</b>	Числовые ряды и их свойства	41
<b>Лекция 11.</b>	Знакоположительные ряды	44
<b>Лекция 12.</b>	Знакопеременные ряды	51
<b>Лекция 13.</b>	Функциональные ряды	55
<b>Лекция 14.</b>	Степенные ряды	59
<b>Лекция 15.</b>	Ряд Тейлора	62